Publicaciones AFAMaC

AFAMaC
matemáticas

OMPR
Olimpiadas de Matemáticas de Puerto Rico
2009-2010

César A. Barreto
Luis F. Cáceres
Arturo Portnoy
Gabriel D. Uribe

Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez

Primera Edición, 2010

Director: Dr. Luis F. Cáceres

Esta producción ha sido subvencionada por el proyecto AFAMaC mediante proyectos del Departamento de Educación Puerto Rico. Contrato #2010-AF-0226

Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez
Impreso y hecho en Puerto Rico

Prólogo

Nuevamente tenemos el gusto de generar una publicación que recoge una a una las pruebas que enfrentaron los estudiantes de la Isla en cada fase de la Olimpiada Matemática de Puerto Rico 2009-2010. Nuestro objetivo es fomentar el estudio de las matemáticas y lograr cada vez más que los estudiantes de escuelas públicas y privadas se interesen en demostrar sus niveles intelectuales.

Con el paso de cada fase se va reduciendo el número de participantes, hasta llegar al final con la selección de los diferentes equipos que representarán a Puerto Rico en las diferentes Olimpiadas Internacionales. Este año, Puerto Rico tuvo la oportunidad de ser la sede de la Olimpiada de Matemáticas de Centroamérica y del Caribe, dejando muy en alto el nombre de Puerto Rico y demostrando una vez más que Puerto Rico lo hace mejor.

Esperamos que este libro sea una guía para que los estudiantes se sigan preparando para las competencias y puedan llegar a ser parte de los equipos que representan al país internacionalmente. Esto es un proceso completo que requiere preparación y compromiso. Tal es el caso de George Arzeno, el cual tuvo una preparación de varios años, que fue recompensada con la primera medalla de oro obtenida por Puerto Rico en la Olimpiada Internacional de Matemáticas 2010 (IMO) en su versión 51, la cual se disputó en Astaná capital de Kazajistán.

Por último agradecemos a todas las personas que de una u otra forma contribuyen para la realización de estas olimpiadas; en especial a los padres y maestros que ven en sus hijos y estudiantes un futuro prometedor para nuestra Isla, deseamos que nos sigan apoyando en la motivación de estos estudiantes. Unidos, lograremos el objetivo de ver a nuestros estudiantes entre los más talentosos del mundo entero.

AFAMaC
Alianza para el Fortalecimiento del Aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas.

Este proyecto está subvencionado por el Departamento de Educación de Puerto Rico y es realizado en el Departamento de Ciencias Matemáticas del Recinto Universitario de Mayagüez de la Universidad de Puerto Rico.

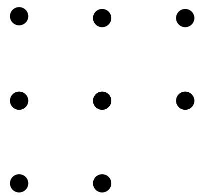
Tabla de Contenido

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

Primera Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL ELEMENTAL(4to, 5to y 6to)

1. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar al unir con segmentos los puntos de la figura?



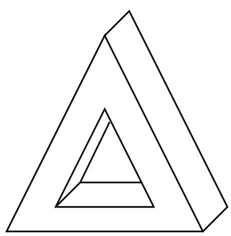
a. 2
b. 3
c. 4
d. 6
e. 7

2. Se eligen tres números del tablero de forma que todos pertenezcan a filas distintas y columnas distintas y se suman los tres números. ¿Cúal es la mayor suma que se puede obtener?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

a. 12
b. 15
c. 18
d. 21
e. 24

3. ¿Cúantas caras tiene el sólido de la figura?



a. 3

b. 5

c. 6

d. 8

e. 12

4. Juan tiró un dado cuatro veces y obtuvo un total de 23 puntos. ¿Cúantas veces obtuvo el número 6?

a. 4

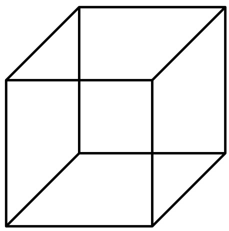
b. 3

c. 2

d. 1

e. no se puede saber

5. María quiere colorear los vértices de un cubo de tal manera que dos vértices unidos por un eje tengan colores diferentes. ¿Cúal es el mínimo número de colores que María necesita?



a. 1

b. 2

c. 3

d. 4

e. 5

6. Dos corredores comienzan a correr al mismo tiempo en la misma dirección. El primero corre a 576 centímetros por segundo y el otro corre a 680 centímetros por segundo. ¿Cúal es la distancia entre ellos después de 9 segundos?

a. 104cm

b. 832cm

c. 936cm

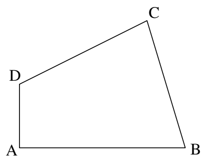
d. 963cm

e. 1256cm

7. Hay tres cajas: una blanca, una roja y una verde. Una de ellas contiene una barra de chocolate, otra contiene una manzana y la otra está vacía. Encontrar el chocolate sabiendo que la manzana no está en la caja blanca ni en la caja verde y el chocolate está en la caja blanca o en la caja roja.

   a. blanca
   b. roja
   c. verde
   d. roja o verde
   e. no se puede saber

8. El cuadrilátero $ABCD$ tiene lados $AB = 11$, $BC = 7$, $CD = 9$ y $DA = 3$, y tiene ángulos rectos en A y en C. El área del cuadrilátero es:



   a. 30
   b. 44
   c. 48
   d. 52
   e. 60

9. 1 jugo, 3 sándwiches y 7 chocolates cuestan \$3,30. 1 jugo, 4 sándwiches y 10 chocolates cuestan \$4,10. ¿Cuánto costará 1 jugo, 1 sándwich y 1 chocolate?

   a. \$1.70
   b. \$1.80
   c. \$1.90
   d. \$2.00
   e. no se puede saber

10. Quince niños están colocados en una circunferencia. Todos ellos utilizan sombreros. El primer sombrero es rojo, el segundo blanco, el tercero azul, el cuarto es rojo, el quinto blanco, el sexto azul y así sucesivamente. Juanita que tiene sombrero marrón quiere entrar en el círculo pero no quiere colocarse al lado de alguien que tenga sombrero blanco. ¿En cuántos lugares puede colocarse Juanita?

a. 2

b. 4

c. 5

d. 10

e. 15

11. En una reunión de comunidad de un barrio, cada una de las 125 personas presentes recibió un número del 1 al 25. En un momento dado, se hicieron dos listas de personas: una con las personas que habían recibido un número par y una con las persona que habían recibido un múltiplo de 3, para que participaran en dos proyectos comunitarios. Algunas personas comenzaron a reclamar que aparecían en ambas listas. ¿Cúantas personas aparecían en ambas listas?

a. 2

b. 6

c. 20

d. 41

e. 61

12. ¿Cuántos números pares de tres dígitos tiene dos dígitos impares?

a. 20

b. 48

c. 100

d. 125

e. 225

13. La fiesta de las OMPR se realizó el día 14 de junio, un sábado del año bisiesto 2008. ¿Cuántos años tienen que pasar, a partir de ese momento, para que el 14 de junio sea nuevamente sábado?

a. 4

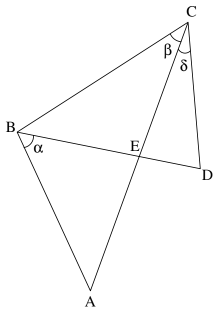
b. 5

c. 6

d. 7

e. 8

14. En el dibujo tenemos que $AE = BE = CE = CD$. Si además tenemos que α ,β ,δ representán las medidas de los ángulos señalados en la figura y $\delta = 20°$, ¿cuál es el valor de la razón $\frac{\alpha}{\beta}$?



a. $\frac{3}{5}$

b. $\frac{4}{5}$

c. 1

d. $\frac{5}{4}$

e. $\frac{5}{3}$

15. Con segmentos de 1cm de longitud podemos formar triángulos. Por ejemplo, con nueve segmentos podemos formar un triángulo equilátero de lados de 3cm. ¿Con qué número de segmentos es imposible formar un triángulo?

a. 4

b. 5

c. 6

d. 7

e. 8

16. En la siguiente multiplicación, las variables $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ representan dígitos. ¿Cuánto vale la suma $A + B + C + D + E + F + G + H + I + J$?

$$
\begin{array}{cccc}
 & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\
\times & & \mathrm{D} & 7 \\
\hline
 & \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \\
\mathrm{H} & \mathrm{I} & \mathrm{J} & \\
\hline
6 & 1 & 5 & 7
\end{array}
$$

a. 17

b. 27

c. 37

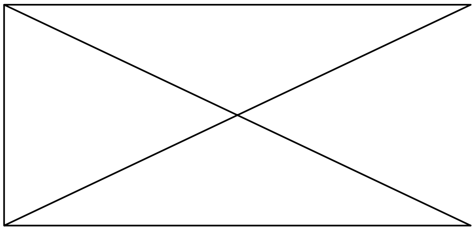
d. 47

e. 57

17. Tres amigos viven en una misma calle: un médico, un ingeniero y un profesor. Sus nombres son Arnaldo (A), Bernardo (B) y Cernaldo (C). El médico es hijo único y el más joven de los tres amigos. Cernaldo es más viejo que el ingeniero y esta casado con la hermana de Arnaldo. Los nombres de el médico, el ingeniero y el profesor, en ese orden, son:

a. A,B,C
b. C,A,B
c. A,C,B
d. B,C,A
e. B,A,C

18. Dos cartones iguales tienen la forma de un triángulo rectángulo de lados de 5cm, 12cm y 13cm. Esmeralda juntó los dos cartones como muestra la ilustración y sobre un papel dibujó el contorno de la figura así obtenida. ¿Cuál es el perímetro de esta figura?



a. 28cm
b. 35cm
c. 41cm
d. 42cm
e. 60cm

19. Una urna contiene 2009 tarjetas numeradas del 1 al 2009. Suponga que se retiran dos tarjetas de la urna y se suman los números escritos en ellas. ¿Cuántos números impares diferentes pueden ser obtenidos de esta manera?

a. 1004
b. 1005
c. 2008
d. 2009
e. 4016

20. Un triángulo se llama *Cool* si las longitudes de sus lados son números enteros y su perímetro es 12. ¿Cuántos triángulos *Cool* existen?

a. 2

b. 3

c. 4

d. 6

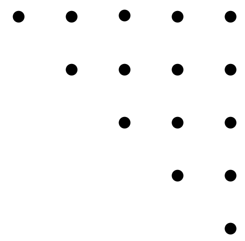
e. 10

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

Primera Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL INTERMEDIO(7mo, 8vo y 9no)

1. ¿Cuántos cuadrados tienen como vértices a los puntos de la siguiente figura?

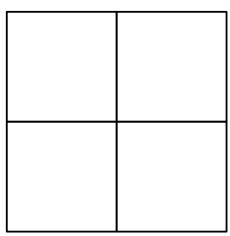


a. 6
b. 7
c. 8
d. 9
e. 10

2. María construye una torre con tres cubos: uno rojo, uno verde y uno azul.¿Cuántas torres diferentes puede construir María?

a. 3
b. 4
c. 5
d. 6
e. 7

3. Lucía escribe los números $2, 3, 4$ y otro número en la tabla de la figura. Los números de la primera columna suman 9 y la suma de los números de la segunda columna es 6. ¿Cuál es el número desconocido?



a. 4

b. 5

c. 6

d. 7

e. 8

4. Los 7 enanitos de Blanca Nieves nacieron el mismo día pero en 7 años consecutivos, es decir que cada año nació uno durante 7 años. La suma de las edades de los tres más jóvenes es 42. ¿Cuál es la suma de las edades de los tres más viejos?

a. 48

b. 51

c. 54

d. 57

e. 60

5. En una clase hay 9 niños y 13 niñas. Si la mitad de los estudiantes de la clase están resfriados, ¿al menos cuántas niñas están resfriadas?

a. 0

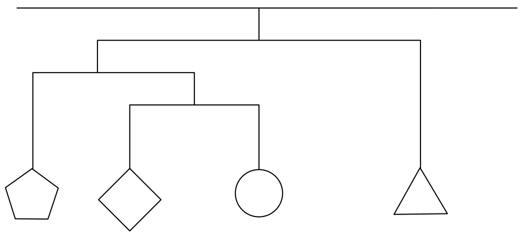
b. 1

c. 2

d. 3

e. 4

6. Si el peso total de todas las figuras de la balanza es 168. Hallar el peso del cuadrado si la balanza está equilibrada y no se cuenta el peso de las cuerdas.



a. 21

b. 42

c. 63

d. 84

e. 168

7. Mauro está ordenando sus CD en un armario, pero la tercera parte de ellos no cupo. Entonces tomó los CD que no cupieron y los puso en tres cajas. Puso 7 en cada caja y todavía le sobraron 2 que los puso sobre la mesa. ¿Cuántos CD tiene Mauro?

a. 21
b. 23
c. 33
d. 46
e. 69

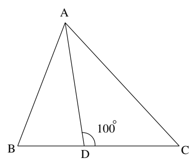
8. ¿Cuál es menor valor de a que hace que $a \times 2009$ sea un cuadrado perfecto?

a. 7
b. 11
c. 41
d. 2009
e. ninguna de las anteriores

9. Sean a, b, c, d números enteros tales que $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$ y $d < 40$. El mayor valor posible de a es:

a. 927
b. 934
c. 951
d. 959
e. 960

10. En el triángulo ABC el segmento AD es un bisector. Además $\angle ADC = 100°$ y $\angle ABC = 2\angle BCA$. Hallar $\angle BCA$.



a. $10°$
b. $20°$
c. $30°$
d. $45°$
e. $50°$

11. Nueve números son escritos en orden creciente. El número del medio es la media aritmética de los 9 números. La media aritmética de los cinco mayores es 68 y la media aritmética de los cinco menores es 44. ¿Cuál es la suma de todos los números?

a. 56

b. 70

c. 112

d. 504

e. 560

12. ¿Cuántos números enteros positivos menores que 500 tienen exactamente 15 divisores enteros positivos?

a. 56

b. 70

c. 112

d. 504

e. 560

13. Sea $P(n)$ la suma de los dígitos pares de n. Por ejemplo $P(2134) = 2 + 4 = 6$. ¿Cuánto vale $P(1) + P(2) + \cdots + P(100)$?

a. 200

b. 360

c. 400

d. 900

e. 2250

14. Edmundo, Carlos y Fernando ganaron \$150 lavando carros. Ellos ganaron cantidades diferentes de dinero. Como son muy amigos, decidieron dividir las ganancias en partes iguales. Para esto, Edmundo dio la mitad de lo que ganó para dividir en partes iguales entre Carlos y Fernando pero Carlos resultó con demasiado dinero y por tanto dio \$10 a cada uno de los otros dos. Finalmente, para que cada uno tuviese la misma cantidad de dinero, Fernando dio a Edmundo \$2. ¿Cuánto ganó Fernando antes de la división?

a. \$23

b. \$50

c. \$51

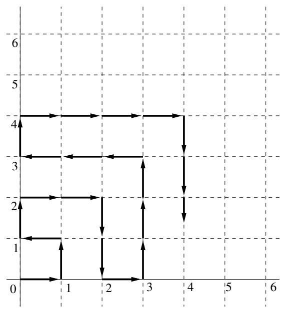
d. \$76

e. \$100

15. De cuantas formas podemos dividir \$10 en monedas de 25 centavos y de 10 centavos de tal forma que al menos una moneda de cada valor tenga que ser utilizada?

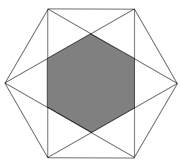
    a. 15
    b. 16
    c. 17
    d. 18
    e. 19

16. Una partícula se mueve a través del primer cuadrante como se indica en la figura. Durante el primer minuto se mueve desde el origen hasta $(1,0)$. A continuación continúa moviéndose siguiendo las direcciones indicadas en el diagrama, moviéndose una unidad de distancia cada minuto. ¿A qué punto llegará la partícula después de exactamente 2 horas?



    a. $(0,10)$
    b. $(0,11)$
    c. $(10,1)$
    d. $(10,0)$
    e. $(11,0)$

17. En el dibujo se tiene un hexágono con sus diagonales. El área del hexágono es S. ¿Cuál es el área del hexágono sombreado?



a. $\frac{1}{2}S$

b. $\frac{1}{3}S$

c. $\frac{1}{4}S$

d. $\frac{3}{8}S$

e. $\frac{1}{\sqrt{6}}S$

18. Luis escribe una lista de números. El primero es 39, y luego cada número es la suma de los cuadrados de los dígitos del anterior. Por ejemplo, el segundo en la lista es $3^2 + 9^2 = 9 + 81 = 90$, y el tercero es $9^2 + 0^2 = 81 + 0 = 81$. ¿Qué número aparece en la posición 2009?

a. 61

b. 37

c. 58

d. 89

e. 145

19. Un número primo se llama *Loco* si es un primo de un solo dígito o un primo que tiene dos o más dígitos, pero que cumple que tanto el número que se obtiene cuando se borra el primer dígito, como cuando se borra el último dígito son también *Locos*. ¿Cuántos primos *Locos* hay?

a. infinitos

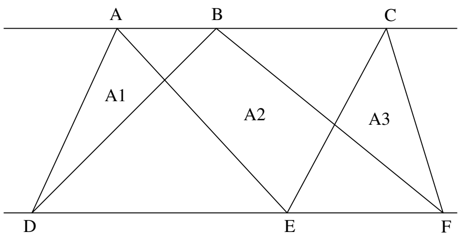
b. 8

c. 9

d. 10

e. 15

20. En la figura, los puntos A, B, C son colineales, así como los puntos D, E, F . Las rectas ABC y DEF son paralelas.



Siendo $A1, A2, A3$ las áreas de las regiones destacadas en la figura, podemos afirmar que:

a. $A2 = 2(A1) = 2(A3)$

b. $A2 = A1 + A3$

c. $A2 > A1 + A3$

d. $A2 < A1 + A3$

e. $(A2)^2 = (A1)(A3)$

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

Primera Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL SUPERIOR(10mo, 11mo y 12mo)

1. La suma de tres números es 80. La suma del primer número con el segundo es 60 y la suma del primer número con el tercero es 20. ¿Cuánto es el producto de estos tres números?

   a. 0
   b. 60
   c. 80
   d. 160
   e. ninguna de las anteriores

2. Juan tiene dos dados. Un dado tiene los números del 1 al 6 y el otro tiene los números del 3 al 8. Juan lanza ambos dados una vez. ¿Si se suman los números de los dos dados, cuál es el resultado que tiene mayor posibilidad de salir?

   a. 9
   b. 10
   c. 11
   d. 12
   e. 13

3. Si $S_{2008} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots - 2008$ y $S_{2009} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots - 2008 + 2009$, entonces $S_{2008} + S_{2009}$ es:

   a. menor que 0
   b. 0
   c. 1
   d. 2
   e. 2009

4. ¿Para cuántos números naturales n, el número $n^2 + n$ es primo?

   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. un número finito pero mayor que 2
   e. un número infinito

5. El primer término de una sucesión es 20. Si un término de la sucesión es t, y t es par, el siguiente término es $t/2$. Si un término de la sucesión es t, y t es impar, el siguiente término es $3t+1$. Por lo tanto, los tres primeros términos de la sucesión son $20, 10, 5$. ¿Cuál es el término que ocupa el lugar 2009 en la sucesión?

   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 8

6. Una clase tiene 22 alumnos y 18 alumnas. 60 % de todos los alumnos (ambos sexos) desean ir a la fiesta del pueblo. ¿Cuál es el número mínimo de alumnas que desea ir a la fiesta del pueblo?

   a. 1
   b. 2
   c. 4
   d. 6
   e. 8

7. Se eligen n números, de 1 a 20. Ninguna pareja de los números elegidos es tal que difieran en 5. ¿Cuál es el máximo valor de n?

   a. 5
   b. 6
   c. 10
   d. 11
   e. 12

8. ¿Para cuántos valores enteros de p se tiene que la expresión $4^{\frac{p-1}{p+1}}$ es también un entero?

   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5

9. Las medidas de los lados de un rectángulo son números enteros. El área del rectángulo es 2009 más que el perímetro. ¿Cuántos rectángulos de esos existen?

a. 0

b. 3

c. 4

d. 5

e. infinitos

10. ¿Cuántos números de cuatro dígitos existen que no tengan tres dígitos consecutivos iguales?

a. 8810

b. 8820

c. 8829

d. 8833

e. 8842

11. Un número entero positivo a es tal que la distancia en la recta numérica entre a y $1/a$ es $80/9$. El valor de $a + 1/a$ es:

a. $\frac{9}{81}$

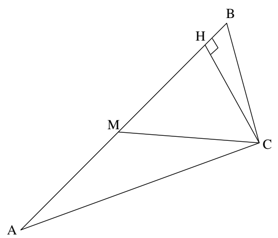
b. $\frac{9}{80}$

c. $\frac{81}{9}$

d. $\frac{82}{9}$

e. 9

12. En el triángulo rectángulo ABC ($\angle C = 90°$). la altura $CH = 1$, la mediana $CM = 2$. Hallar $\angle A$.



a. 10°

b. 15°

c. 20°

d. 25°

e. 30°

13. Pablo ha escrito 5 números naturales en una hoja de papel y Beatriz ha escrito 8 números naturales en otra hoja. Ninguno conoce los números del otro. Pablo afirma que hay dos números en la hoja

de Beatriz, cuya suma es divisible por 8. Beatriz afirma que hay dos números en la hoja de Pablo, tales que, o bien su suma, o bien su diferencia, es divisible por 7. ¿Cuál de las dos afirmaciones es necesariamente correcta?

a. Sólo la de Pablo

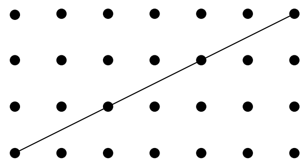
b. Sólo la de Beatriz

c. Sólo la de Pablo suponiendo que los números de Beatriz son todos distintos

d. Ninguna es correcta

e. Ambas son correctas

14. En la figura se ve un rectángulo formado por 4 filas de 7 puntos cada una. Se ha trazado la diagonal desde el vértice inferior izquierdo al superior derecho; hay 4 puntos sobre ella. Se hace lo mismo con un rectángulo de 22 filas, con 36 puntos en cada una. ¿Cuántos puntos hay en su diagonal?



a. 2

b. 3

c. 5

d. 6

e. 8

15. Siendo $x = 10^{-2009}$, elija la alternativa de mayor valor.

a. $\frac{1}{x}$

b. $\frac{1}{x(x+1)}$

c. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$

d. x

e. $\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$

16. Un entero n es tal que $n2^n$ tiene 2008 divisores más que n. La suma de los dígitos de n es:

a. 5

d. 11

b. 7

c. 9

e. 12

17. ¿Cuántos de los números $2, 3, 5, 11$ son divisores de $371^{40} - 41^{40}$?

a. uno

b. dos

c. tres

d. cuatro

e. ninguno

18. Hallar el número de soluciones reales positivas del sistema

$$\begin{aligned} a^2 &= b + 2 \\ b^2 &= c + 2 \\ c^2 &= a + 2 \end{aligned}$$

a. 0

b. 1

c. 2

d. 4

e. 8

19. Un número entero de cuatro dígitos es *Cangri* si es múltiplo de 9 y ninguno de sus dígitos es nulo. ¿Cuántos números *Cangri* hay?

a. 729

b. 849

c. 1024

d. 1109

e. 1284

20. En un triángulo isósceles PQR con $PQ = PR = 3$ y $QR = 2$, la recta tangente a su circuncírculo (círculo que pasa por los vértices P, Q, R) en el punto Q se cruza con la prolongación del lado PR en X. La longitud de RX es:

a. $\frac{16}{5}$

b. $\frac{12}{5}$

c. $\frac{8}{3}$

d. $\frac{9}{2}$

e. $\frac{9}{4}$

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

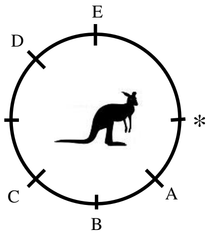
Segunda Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL ELEMENTAL (4to, 5to y 6to grado)

1. Teresita está esperando en la fila del banco. Ella es la número 25 contando desde el principio de la fila y la número 12 contando desde el final de la fila. ¿Cuánta gente hay en la fila?

a. 13
b. 25
c. 35
d. 36
e. 37

2. La nariz del Canguro apunta hacia la señal $*$ en la figura. ¿ En qué dirección apuntará la nariz si gira 630° en el sentido de las manecillas del reloj sin moverse del sitio donde está?



a. A
b. B
c. C
d. D
e. E

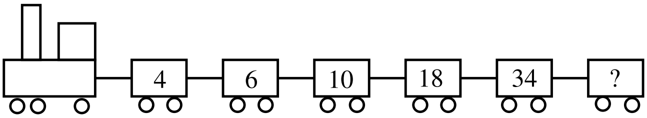
3. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener sumando dos números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

a. 6
b. 7
c. 8
d. 9
e. 10

4. Una vaca da 6000 litros de leche en un año. ¿Cuánta leche dan ocho vacas en ocho años?

   a. 48,000 litros
   b. 64,000 litros
   c. 220,000 litros
   d. 368.000 litros
   e. 384,000 litros

5. ¿Cuál es el número del último vagón del tren?



   a. 52
   b. 64
   c. 66
   d. 72
   e. 88

6. Las amigas Anita, Lucía, Juanita y María salen de paseo. Ellas tienen dos tiendas de campaña y van a dormir dos de ellas en cada tienda. ¿Cuántas formas diferentes tienen ellas de repartirse para dormir?

   a. 2
   b. 4
   c. 6
   d. 8
   e. 10

7. ¿Cuántos múltiplos de 7 hay entre 100 y 1000?

   a. 70
   b. 120
   c. 128
   d. 140
   e. 148

8. En cierto mes tres domingos fueron días con número par. ¿Qué día de la semana fue el día 20 de ese mes?

a. lunes

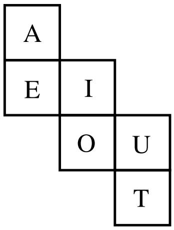
b. martes

c. miércoles

d. jueves

e. sábado

9. Si la figura que se muestra se dobla para formar un cubo, que letra queda en la cara opuesta a E?



a. A

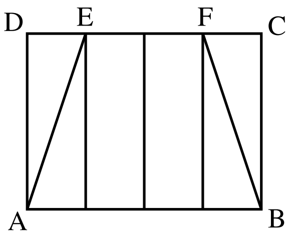
b. I

c. O

d. U

e. T

10. $ABCD$ es un rectángulo cuya área es 12 unidades cuadradas. ¿Cuál es el área del trapecio $EFBA$?



a. 2.5

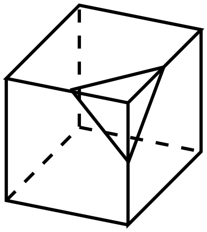
b. 3

c. 4

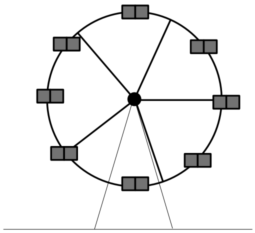
d. 6

e. 9

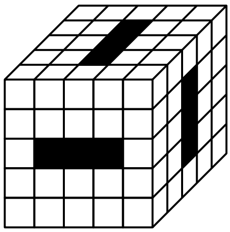
11. Todas las esquinas de un cubo de 2 cm de lado se cortan como se indica en la figura, a distancia de 1 cm sobre cada arista. ¿Cuántos vértices tiene el sólido así obtenido?



12. La gran atracción del parque es la Rueda Gigante (en la figura hay una más pequeña). Las cabinas de pasajeros están igualmente espaciadas y llevan los números $1, 2, \ldots$ En el momento en que la cabina número 25 alcanza el punto más bajo, la número 8 está en lo más alto. ¿Cuántas cabinas tiene la rueda?



13. Se hacen túneles que atraviesan el cubo grande en la forma indicada en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?



14. Un día en el parque Toño y su hermana Nina se dieron cuenta que Toño tiene el mismo número de hermanos que de hermanas, pero Nina tiene el doble de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hermanos y hermanas tiene Toño en total?

15. Si multiplicamos el número 4 por si mismo 2010 veces obtenemos un número cuyo último dígito, es decir el dígito de las unidades, es:

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

Segunda Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL INTERMEDIO (7mo, 8vo y 9no grado)

1. En la tienda de la esquina los chocolates cuestan el doble que los caramelos. Comprar tres chocolates y dos caramelos cuesta \$16. ¿Cuánto cuesta comprar dos chocolates y tres caramelos?

   a. \$12
   b. \$13
   c. \$14
   d. \$16
   e. \$17

2. ¿Cuál es el máximo número de figuras, como la **figura 1**, que pueden colocarse, sin sobreponerse, en el cuadrado de la **figura 2**?

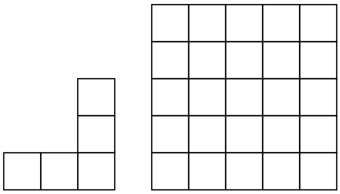


Figura 1 Figura 2

   a. 2
   b. 3
   c. 4
   d. 5
   e. 6

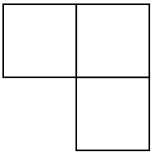
3. Si le cortas cuadraditos de $4cm^2$ de área en cada esquina de un rectángulo cuyos lados miden 15 centímetros de largo y 9 centímetros de ancho, ¿cuál es el área de la figura que te queda?

   a. $135cm^2$
   b. $127cm^2$
   c. $119cm^2$
   d. $112cm^2$
   e. $105cm^2$

4. Hace tres años, los trillizos Pablo, Simón y José, y su hermana Eva, 4 años mayor, sumaban 24 años en total. ¿Cuántos años tiene hoy Eva?

a. 5
b. 8
c. 9
d. 12
e. 15

5. ¿Cuál es el menor número de piezas de rompecabezas, como la que se muestra en la figura, necesarias para formar un cuadrado, sin sobreponerlas?

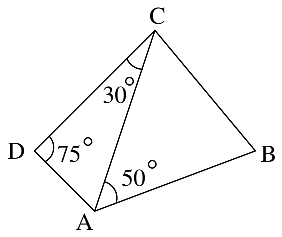


a. 3
b. 8
c. 9
d. 12
e. 27

6. Si el Dragón Rojo tuviera 6 cabezas más que el Dragón Verde, entre los dos tendrían 34 cabezas. Pero el Dragón Rojo tiene 6 cabezas menos que el Verde. ¿Cuántas cabezas tiene el Dragón Rojo?

a. 6
b. 8
c. 12
d. 14
e. 16

7. En la figura se muestra un cuadrilátero $ABCD$. Si $DC = AB$, ¿Cuánto mide el ángulo ABC?



a. 30°
b. 50°
c. 55°
d. 65°
e. 70°

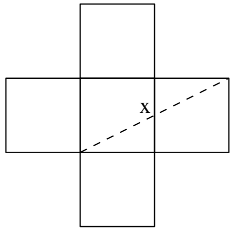
8. El producto de tres dígitos a, b, c es el número de dos dígitos bc y el producto de los dígitos b y c es c. ¿Cuánto vale a si $c = 2$?

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 6

9. Ocho cartas numeradas del 1 al 8 se colocan dentro de dos cajas A y B, de tal forma que la suma de los números de las cartas en ambas cajas es la misma. Si solamente hay 3 cartas en la caja A, entonces necesariamente se tiene que:

a. Tres cartas en la caja B tienen número impar
b. Cuatro cartas en la caja B tienen número par
c. La carta con el número tres está en la caja B.
d. La carta con el número dos está en la caja B
e. No es posible que la suma de igual en ambas cajas

10. Si la longitud x es de 6 dm, ¿cuántos decímetros cuadrados vale el área de la cruz de la figura, formada por cinco cuadrados?



a. 6

b. 12

c. 16

d. 26

e. 36

11. Hay cinco niñas en una clase de tenis. Cada una de las niñas tiene que jugar contra todas las demás en un torneo. ¿Cuántos juegos hay?

12. Un número de cuatro cifras estaba escrito en la pizarra. Juanita borró los últimos dos dígitos y solamente se ve 8 6 ? ? . El número de cuatro dígitos es divisible por tres, cuatro y cinco. Hallar el número de cuatro dígitos.

13. Decimos que un número entero mayor o igual que 2 es bueno si puede escribirse como la suma de números naturales, tales que la suma de sus recíprocos sea igual a 1. Por ejemplo el 3 no es bueno ya que:

$$3 = 1 + 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$$

$$3 = 1 + 1 + 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$$

¿Cuáles son los números naturales menores que 10 que son buenos?

14. Encuentra el menor número natural de tres dígitos tal que su triple sólo tiene dígitos pares.

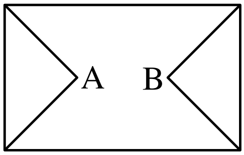
15. Encuentra todas las soluciones enteras de la ecuación $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{y} = 7$

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

Segunda Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL SUPERIOR (10mo, 11mo y 12mo grado)

1. ¿Cuántos caminos conducen del punto A al punto B de la figura, si no se puede pasar por ningún punto más de una vez?

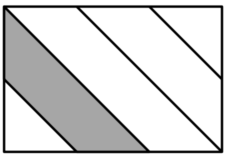


a. 3
b. 6
c. 7
d. 8
e. al menos 10

2. El producto de las edades de mis hijos es 1664. La edad del más joven es la mitad de la del mayor. ¿Cuántos hijos tengo?

a. 2
b. 3
c. 4
d. 5
e. 6

3. Una bandera consiste de cinco franjas todas ellas con el mismo ancho. La bandera total tiene un área de $3m^2$. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el área de la franja sombreada?



a. $\frac{1}{4}$
b. $\frac{1}{2}$
d. 1
e. $\frac{5}{4}$

c. $\frac{3}{4}$

4. ¿Cuántos enteros de la lista $100, 101, 102, \ldots, 999$ no contienen los dígitos 2, 5, 7 y 8?

a. 160

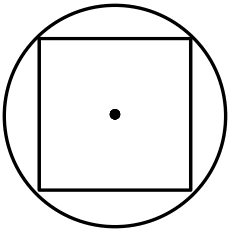
b. 170

c. 180

d. 190

e. 200

5. Un cuadrado está inscrito en un círculo de radio 1. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?



a. 8

b. 6

c. 2π

d. $2\sqrt{2}$

e. $4\sqrt{2}$

6. Hallar la cantidad de ternas (x, y, z) de enteros positivos que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$xy + yz = 44$$
$$xz + yz = 23$$

a. 0

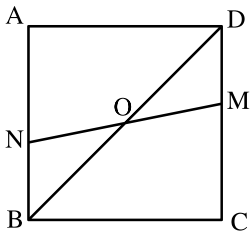
b. 1

c. 2

d. 3

e. 4

7. Si la figura representa un cuadrado con vértices A, B, C y D y el ángulo ONA mide $60°$, ¿cuánto mide el ángulo DOM?



a. 10°

b. 15°

c. 20°

d. 30°

e. 35°

8. ¿Cuántos conjuntos de enteros positivos consecutivos (dos o más) cumplen que la suma de sus elementos es igual a 100?

a. 0

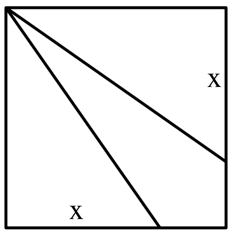
b. 1

c. 2

d. 3

e. 4

9. María tiene un cuadrado de papel de lado 1. Quiere dividirlo en tres partes como se muestra en la figura. Si las tres partes deben tener la misma área, ¿cuánto vale x?



a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{4}$

d. $\frac{2}{3}$

e. $\frac{3}{4}$

10. Un número de dos dígitos se divide por la suma de sus dígitos. ¿Cuál es el máximo residuo que se puede obtener?

a. 12

b. 13

c. 14

d. 15

e. 16

11. ¿Cuál es el primer dígito, por la izquierda, en el menor número natural cuya suma de dígitos es 2010?

12. Encuentra todos los triángulos rectángulos tales que las medidas de uno de los catetos y de la hipotenusa sean números enteros y la medida del otro cateto sea igual a la raíz cuadrada de 12.

13. En un rectángulo $ABCD$ la longitud de AB es el doble que la de BC. En el lado CD se elige un punto M tal que el ángulo AMD es igual al ángulo AMB. Determina la medida del ángulo AMB.

14. Encuentra todos los enteros b, c tales que la ecuación $x^2 - bx + c = 0$ tenga dos soluciones enteras x_1, x_2 tales que $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

15. Sean a, b números reales tales que $a^3 + b^3 = 13$ y $a^9 + b^9 = -299$. Encuentra el valor de ab.

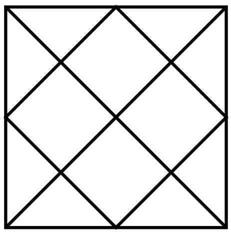
OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE PUERTO RICO 2010

EXAMEN NIVEL ELEMENTAL(4to, 5to y 6to)

1. María cuenta gallinas en el corral. Contando de dos en dos le sobra una y contando de tres en tres también le sobra una. ¿Cuál es el menor número de gallinas que puede haber en el corral?

2. En un torneo la mitad de los competidores se eliminan en cada ronda (si al principio de la ronda el número de competidores es impar, uno de ellos se selecciona al azar y se queda para la segunda ronda). Si empiezan 100 competidores, ¿cuántas rondas deben pasar para que quede un competidor final?

3. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



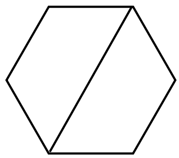
4. En un calabozo hay dragones rojos y verdes. Cada dragón rojo tiene 6 cabezas, 8 patas y 2 colas. Cada dragón verde tiene 8 cabezas, 6 patas y 4 colas. Si sabemos que entre todos los dragones tienen 44 colas y que hay 6 patas verdes menos que cabezas rojas, ¿cuántos dragones verdes hay?

5. Entre tres niños se comieron 17 galletas y cada niño comió por lo menos una. Si Octavio comió mas galletas que los otros, ¿cuál es el menor número de galletas que pudo haberse comido?

6. 28 niños participaron en una carrera. El número de niños que llegaron detrás de Luis fue el doble del número de niños que llegaron antes que él. ¿En qué lugar llegó Luis?

7. Andrés cuenta los números del 1 al 100 y aplaude si el número que dice es múltiplo de 3 ó termina en 3. ¿Cuántas veces aplaudirá Andrés?

8. El dibujo representa un hexágono regular de 42 cm de perímetro, en el cual está trazada una de sus diagonales. Hallar la longitud de esta diagonal.



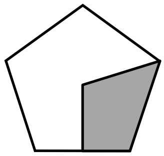
9. Un rectángulo $ABCD$ tiene 8cm^2 de área. E y F son puntos medios de AB y BC respectivamente. Hallar el área del triángulo BFE.

10. La muñeca de Ana viene con 3 blusas diferentes, 3 faldas diferentes, 2 sombreros diferentes y un par de zapatos. ¿ De cuántas formas puede vestir Ana a su muñeca?

OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE PUERTO RICO 2010

EXAMEN NIVEL INTERMEDIO (7mo, 8vo y 9no)

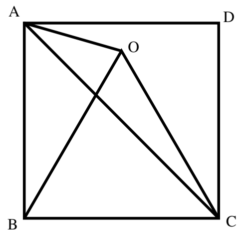
1. La región sombreada tiene el vértice en el centro del pentágono regular. ¿Qué porcentaje del pentágono está sombreado?



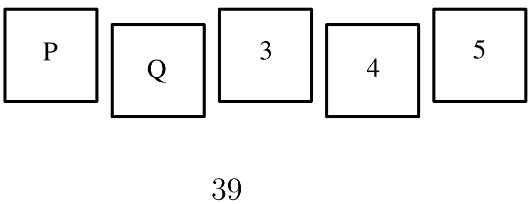
2. ¿Cuántos números entre 1000 y 2000 tienen 8 como producto de sus dígitos?

3. Si $a \cdot b = 12$, $b \cdot c = 20$, $a \cdot c = 15$ y a es positivo, ¿cuánto vale $a \cdot b \cdot c$?

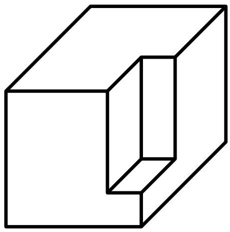
4. En la figura $ABCD$ es un cuadrado y OBC es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo OAC?



5. En una mesa hay cinco cartas. Cada carta tiene de un lado un número natural y del otro lado una letra. Juan afirma: cualquier carta que tenga de un lado una vocal tiene un número par del otro lado. Pedro demostró que Juan mentía dando vuelta sólo a una carta. ¿De cuál de las cinco cartas se trata?



6. Haciendo cortes paralelos a las caras de un cubo de madera se obtiene una pieza como la que se muestra. Si el volumen original del cubo era 8m^3, ¿cuál es el área de la superficie que queda?



7. A es un cuadrado perfecto de tres dígitos y además todos sus dígitos son cuadrados perfectos. ¿Cuántos valores puede tener A?

8. Se tiene un cuadrado $ABCD$. ¿Cuántos cuadrados distintos se pueden construir que tengan dos vértices en común con el cuadrado dado?

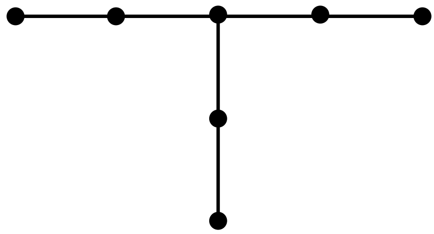
9. El dígito de las unidades del número $3^{1001} \cdot 7^{1002} \cdot 13^{1003}$ es:

10. Demostrar que si n es impar, entonces n^3+3n^2-n-3 es divisible entre 48.

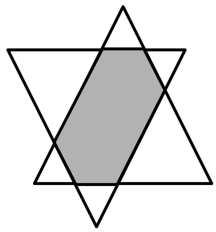
OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE PUERTO RICO 2010

EXAMEN NIVEL SUPERIOR (10mo, 11mo y 12mo)

1. El número de triángulos con sus tres vértices en los puntos de la figura es:



2. Dos triángulos equiláteros iguales con perímetro de 18 cm se sobreponen de manera que sus lados quedan paralelos como indica la figura. ¿Cuál es el perímetro del hexágono que queda formado dentro de la figura?



3. Hugo miente siempre en martes, jueves y sábados y el resto de días de la semana dice siempre la verdad. Si un día en particular mantenemos la siguiente conversación:

   Pregunta: ¿Qué día es hoy?
   Hugo responde: sábado
   Pregunta: ¿Qué día será mañana?
   Hugo responde: miércoles

   ¿De qué día de la semana se trata?

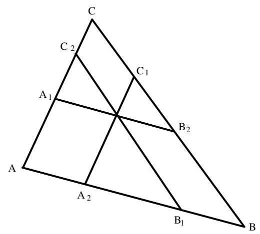
4. ¿Cuál es el mayor divisor primo de $2^{16} - 1$?

5. ¿De cuántas maneras se puede escoger en un tablero de ajedrez una casilla blanca y una negra, de tal manera que no estén las dos en una misma fila ni en una misma columna?

6. ¿Cuántas sucesiones $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ existen tales que los números $1, 2, \ldots, 2010$ aparecen una sola vez en la sucesión y además i pertenece al conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ para cada i tal que $2 \leq i \leq 2010$?

7. Las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$ son números enteros. Encontrar p, q y las raíces de la ecuación sabiendo que $p + q = 198$.

8. Sea I cualquier punto interior del triángulo ABC. Los segmentos A_1B_2, B_1C_2 y C_1A_2 pasan por I y son paralelos a AB, BC y CA respectivamente (ver figura).



Encontrar el valor de $\dfrac{A_1B_2}{AB} + \dfrac{B_1C_2}{BC} + \dfrac{C_1A_2}{CA}$

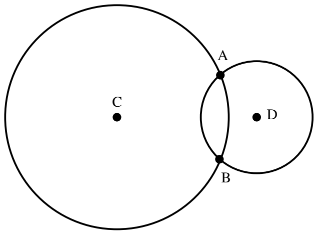
9. Encontrar todas las soluciones enteras del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(y+z) &= 35 \\ y(z+x) &= 32 \\ z(x+y) &= 27 \end{aligned}$$

10. Determinar todos los enteros x para los cuales $x(x+1)(x+7)(x+8)$ es un cuadrado perfecto.

OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS DE PUERTO RICO EXAMEN DE SELECCIÓN 2009

1. Los círculos de la figura tienen sus centros en C y D y se intersecan en A y en B. Si el ángulo ACB mide $60°$, el ángulo ADB mide $90°$ y $DA = 1$, ¿Cuánto mide CA?



2. Se tiene la sucesión de números $1, a_2, a_3, \ldots$ que satisface la igualdad $1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = n^2$, para todo entero $n > 2$. Determinar el valor de $a_3 + a_5$.

3. Cinco niños se dividen en grupos y en cada grupo se toman de la mano formando una rueda para bailar girando. ¿Cuántas ruedas distintas pueden formar los niños, si es válido que haya grupos de 1 a 5 niños, y puede haber cualquier número de grupos?

4. Hallar el mayor valor posible en los números reales del término $\dfrac{3x^2 + 16xy + 15y^2}{x^2 + y^2}$ con $x^2 + y^2 \neq 0$.

5. Encontrar todos los números primos p y q tales que $2p^2q + 45pq^2$ es un cuadrado perfecto.

6. Encontrar todos los valores de r tales que la desigualdad

$$r(ab + bc + ca) + (3 - r)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

es cierta para a, b, c reales positivos arbitrarios.

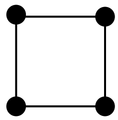
SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

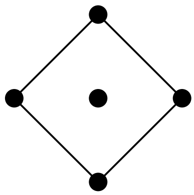
Primera Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL ELEMENTAL (4to, 5to y 6to grado)

1. Si consideramos cuadrados como los de la figura



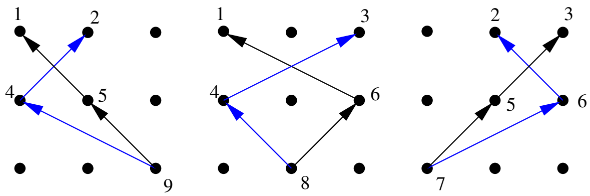
Podemos contar que se forman 3 cuadrados diferentes. Notemos que tenemos otro tipo de cuadrado y es de la siguiente forma



De los cuales podemos contar unicamente 1.

Entonces en total tenemos que se pueden formar 4 cuadrados diferentes en la figura inicial.

2. Veamos todas los posibles caminos que se pueden tomar empezando desde la última fila:

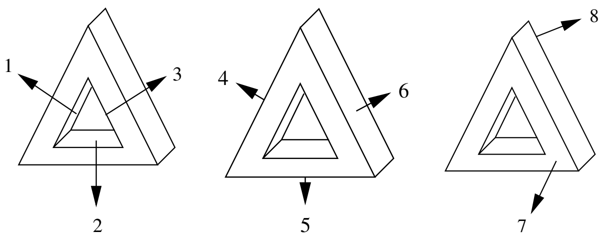


Si empezamos desde el 9, como no podemos tomar ni el 6, ni el 3, ni el 7, ni el 8, entonces debemos tomar de la segunda fila el 4 ó el 5. Si tomamos el 4, la única opción que nos queda en la primera fila es el tomar el 2 y por lo tanto la suma es $9 + 4 + 2 = 15$. Si por el contrario tomamos el 5, la única opción que nos queda en la primera fila es el 1 y por lo tanto la suma es $9 + 5 + 1 = 15$.

Si ahora empezamos por el 8, como no podemos tomar ni el 5, ni el 2, ni el 9, ni el 7. Las únicas opciones que nos quedan para la segunda fila son el 4 ó el 6. Si tomamos el 4, solo podremos tomar en la primera fila es el 3 y así la suma será $8+4+3 = 15$. Si por el contrario tomamos el número 6, la única opción para la primera fila es tomar el 1 y la suma entonces será $8 + 6 + 1 = 15$.

Si empezamos con el 7, como no podemos tomar ni el 4 ni el 1 ni el 9 ni el 8, los únicos números que podemos tomar en la segunda fila son el 5 ó el 6. Si tomamos el 5 la única opción que queda para la primera fila es el 3 y por lo tanto la suma es $7+5+3 = 15$. Ahora si por el contrario tomamos el 6, la única opción que tenemos es el 2 en la primera fila y la suma será $7 + 6 + 2 = 15$. Por lo tanto, la suma por cualquiera de los caminos que formemos será 15.

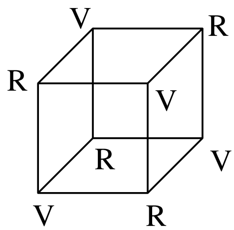
3. Recordemos que una cara de un sólido es un poligono que lo delímita. Contaremos las caras en tres pasos:



Como podemos ver en las figuras, en en interior de la figura podemos contar 3 caras, otras 3 caras en el exterior de la figura, una la cara en el frente y una cara atrás. Por lo tanto tenemos un total de 8 caras en el sólido.

4. Supongamos que sólo tenemos un 6, luego la mayor suma que podemos obtener es $6+5+5+5=21$, por tanto debemos tener más de un 6. Consideremos ahora dos 6, entonces la máxima suma que podemos obtener es $6+6+5+5=22$, lo que nos indica que debemos tener más de dos 6. Si tenemos tres 6, la máxima suma que podemos alcanzar es $6+6+6+5=23$; la cúal cumple la condición. No podemos tener cuatro 6, ya que la suma da 24. Por lo tanto Juan tiró el número 6 tres veces.

5. Claramente un solo color no es suficiente, para colorear los vértices del cubo como María quiere.
   Verifiquemos con dos colores. Veamos la siguiente figura, donde denotamos los colores por R y V.

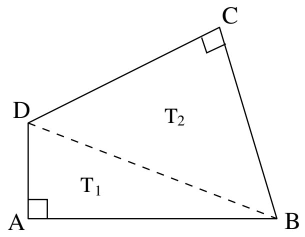
   Así que sólo se necesitan dos colores.

6. Sean A el corredor que tiene una velocidad de 576 centimetros por segundo y B el corredor que tiene una velocidad de 680 centimetros por segundo. El corredor A en 9 segundos logra avanzar $9 \cdot (576) = 5184cm$ y el corredor B por su parte avanza $9 \cdot (680) = 6120cm$.

   Por lo tanto, la diferencia entre las distancias que recorrieron los dos en 9 segundos fue de $6120 - 5184 = 936cm$.

7. Como la manzana no está en la caja blanca y tampoco esta en la caja verde, necesariamente debe estar en la caja roja. Así que el chocolate sólo puede estar en la caja blanca.

8. Trazamos la diagonal $\overline{DB}$ formando dos triángulos rectángulos T_1 y T_2 como lo vemos en la figura



El área del triángulo T_1 es

$$A_{T_1} = \frac{DA \cdot AB}{2} = \frac{3 \cdot 11}{2} = \frac{33}{2}$$

El área del triángulo T_2 es

$$A_{T_2} = \frac{BC \cdot CD}{2} = \frac{7 \cdot 9}{2} = \frac{63}{2}$$

Así el área del cuadrilátero es $A_{T_1} + A_{T_2} = \frac{33}{2} + \frac{63}{2} = \frac{96}{2} = 48$.

9. Podemos formar las siguientes ecuaciones tomando $j =$jugo, $s =$sándwich y $c =$chocolate

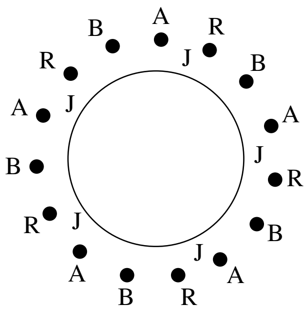
$$1j + 3s + 7c = 3{,}30 \qquad (1)$$
$$1j + 4s + 10c = 4{,}10 \qquad (2)$$

Multiplicando la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por 2, tenemos

$$3j + 9s + 21c = 9{,}90$$
$$2j + 8s + 20c = 8{,}20$$

Al restar estas dos últimas ecuaciones obtenemos $j + s + c = 1{,}70$.

10. Como Juanita no quiere estar junto a alguien de sombrero blanco, ella se puede ubicar únicamente entre los niños que tienen sombrero azul y rojo. En la figura se observa que ella sólo tiene 5 posibilidades para hacer esto.



11. Las personas que participaron en los dos proyectos son aquellas que son múltiplos de 2 y 3, es decir, los múltiplos de 6. Por lo tanto al dividir 125 entre 6, el cociente nos da la cantidad de personas que participaron en los dos proyectos. $125 = (20 \cdot 6) + 5$, de donde tenemos que son 20 personas, las que se encuentran en ambos proyectos.

12. Sabemos que los números pares son aquellos cuyo último dígito es par: $0, 2, 4, 6, 8$, es decir, que para las unidades del número de tres cifras, tenemos 5 posibilidades.
    Para los otros dos dígitos, es decir, las decenas y las centenas, sólo se pueden colocar dígitos impares, $1, 3, 5, 7, 9$, luego hay 5 posibilidades para las decenas y 5 posibilidades para las centenas. Por tanto, por el principio de la multiplicación obtenemos

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

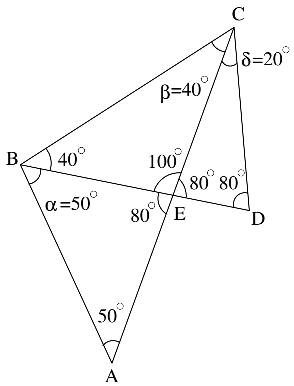
.

13. Recordemos que un año normal tiene 365 días y que este se divide en semanas de 7 días cada una. Notemos que $365 = (7 \times 52) + 1$, es decir que la fecha se corre un día, de año a añó. Por otro lado un año bisiesto tiene 366 dias, por tanto, $366 = (7 \times 52) + 2$, lo que significa que la fecha se corre dos días, cuando el año es bisiesto. La siguiente tabla nos ilustra nuestra situación:

Año	Tipo de año	Día 14 de junio
2008	Bisiesto	Sábado
2009	Normal	Domingo
2010	Normal	Lunes
2011	Normal	Martes
2012	Bisiesto	Jueves
2013	Normal	Viernes
2014	Normal	Sábado

Luego pasarán 6 años para que el 14 de junio sea sábado nuevamente.

14. Como $\delta = 20°$ y $CE = CD$, entonces en el triángulo isósceles CED, se tiene que $\sphericalangle CED = \sphericalangle EDC = 80°$. Pero $\sphericalangle BEC + \sphericalangle CED = 180°$ lo que significa que $\sphericalangle BEC = 100°$. Como el triángulo BEC es isósceles ya que $BE = CE$, entonces $\sphericalangle CBE = \beta = 40°$. Por otro lado, $\sphericalangle AEB = \sphericalangle CED = 80°$ por ángulos opuestos por el vértice. Así, como el triángulo BAE es isósceles ya que $AE = BE$, entonces $\sphericalangle BAE = \alpha = 50°$. Todas estas medidas las tenemos en la siguiente figura



Por tanto

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{50}{40} = \frac{5}{4}$$

15. Para que un triángulo se pueda formar, la suma de las longitudes de dos lados tiene que ser mayor que la longitud del tercer lado.

Esto se conoce como la desigualdad triangular. Es decir, si tenemos un triángulo con lados a, b y c, este debe satisfacer que:

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

Si al menos una de las anteriores desigualdades deja de cumplirse, inmediatamente podremos decir que no es un triángulo. Notemos que si tenemos 5 segmentos, podemos construir un triángulo de lados $1, 2, 2$ que satisface la desigualdad triangular. Al tomar 6 segmentos, podemos construir el triángulo $2, 2, 2$. Para 7 segmentos el triángulo $2, 2, 3$ y para 8 segmentos, el triángulo $2, 3, 3$.
Cuando tomamos 4 segmentos la unica opción que tenemos es $1, 1, 2$. Notemos que no se cumple que $2 < 1 + 1$. Por tanto, es imposible construir un triángulo con 4 segmentos.

16. Factorizando $6157 = 47 \cdot 131$. Así tenemos que $ABC = 131$ y $D7 = 47$, luego $EFG = 917$ y $HIJ = 524$. Por lo tanto

$$A+B+C+D+E+F+G+H+I+J = 1+3+1+4+9+1+7+5+2+4 = 37$$

17. Para saber esto consideraremos la siguiente tabla, marcando con X la profesión que no puede tener cada uno de ellos y con O la profesión que tiene.

	Médico	Ingeniero	Profesor
A			
B			
C			

Como Cernaldo es el mayor de todos, no es médico y tampoco ingeniero. Por lo tanto él es el profesor.

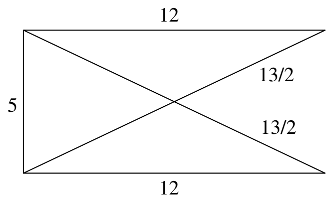
	Médico	Ingeniero	Profesor
A			
B			
C	X	X	O

Arnaldo no es médico por que tiene una hermana y tampoco es profesor, ya que el profesor es Cernaldo. Entonces Arnaldo es ingeniero.

	Médico	Ingeniero	Profesor
A	X	O	X
B			
C	X	X	O

Así el médico es Bernardo y la combinación correcta es BAC.

18. Si trazamos la línea entrecortada formaremos un rectángulo, donde las diagonales se cortan en el punto medio, como lo muestra la figura:



Por lo tanto, el perímetro de la figura es $12+5+12+\frac{13}{2}+\frac{13}{2}=42$.

19. Se podrián formar todos los números desde el $1+2=3$ hasta $2008+2009=4017$, es decir,

$$3, 4, 5, 6, \ldots, 4015, 4016, 4017$$

Luego la cantidad de números impares en esta lista es

$$\frac{4017-1}{2}=2008$$

20. Debemos conseguir todas las combinaciones de tres números enteros positivos cuya suma sea 12. Estas son:

$$\begin{array}{cccc} 1,1,10 & 1,2,9 & 1,3,8 & 1,4,7 \\ 1,5,6 & 2,2,8 & 2,3,7 & 2,4,6 \\ 2,5,5 & 3,3,6 & 3,4,5 & 4,4,4 \end{array}$$

De esta lista sólo tres cumplen la desigualdad triangular y son $(2,5,5)$, $(3,4,5)$ y $(4,4,4)$

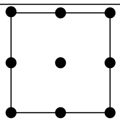
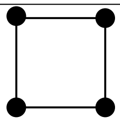
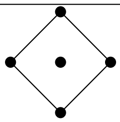
SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

Primera Fase 2009-2010

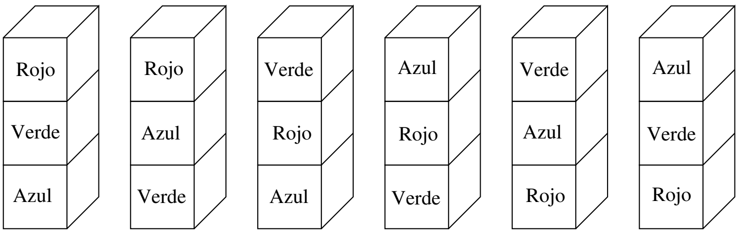
EXAMEN NIVEL INTERMEDIO (7mo, 8vo y 9no grado)

1. Tenemos tres tipos de cuadrados los cuales vemos y contamos en la siguiente tabla

Figura	Cantidad
	1
	6
	3

Por lo tanto, hay en total 10 cuadrados en la figura dada.

2. Todas las posibilidades para ordenar los tres cubos dados, se muestran en la siguiente figura



Por lo tanto hay 6 posibilidades.

3. Como ninguna suma entre dos de los números dados es 9, entonces el número desconocido debe ir en la primera columna y por lo

tanto, el 2 y el 4 deben de ir en la segunda columna ya que son los únicos que suman 6. Entonces el 3 va en la primera columna y el número que falta sería el 6 para que su suma sea 9.

3	2
6	4

Por lo tanto, el número desconocido es 6.

4. Supongamos que el de menor edad tiene x años. Entonces las edades de los enanitos son:

$$x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6$$

Como la suma de los tres menores es 42, entonces

$$\begin{aligned} x+(x+1)+(x+2) &= 42 \\ 3x+3 &= 42 \\ 3x &= 39 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Así las edades de todos son

$$13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$$

y la suma de las edades de los tres mayores es $17+18+19=54$.

5. En total hay 22 alumnos en la clase, de los cuales 11 de ellos están resfriados. Como hay 9 niños en la clase entonces tiene que haber por lo menos 2 niñas resfriadas.

6. Como la balanza esta equilibrada, eso quiere decir que ambos lados pesan 84.

$$\text{peso } \triangle = \text{peso } \pentagon + \text{peso } \diamond + \text{peso } \bigcirc$$

Pero como la balanza esta equilibrada, entonces peso $\triangle = 84$ y peso $\pentagon$ + peso $\diamond$ + peso $\bigcirc = 84$. Pero esta subbalanza esta equilibrada y el peso a ambos lados es 42. es decir, peso $\pentagon = 42$ y peso $\diamond$ + peso $\bigcirc = 42$. De nuevo, la subbalanza esta equilibrada lo que significa que

$$\text{peso } \diamond = 21 = \text{peso } \bigcirc$$

Por lo tanto peso $\diamond = 21$.

7. Sea x la cantidad de CD que tiene Mauro.

   $\dfrac{1}{3}x$ son los que no pudo meter en el armario. De estos, él tiene tres cajas con 7 CD cada una, es decir 21 CD's y 2 más que puso sobre la mesa suman 23. Luego $\frac{1}{3}x = 23$ y resolviendo para x, obtenemos que $x = 69$.

8. Podemos factorizar 2009 en factores primos. Así $2009 = 7^2 \cdot 41$. Entonces para completar el cuadrado perfecto hace falta multiplicar por $a = 41$, ya que

$$41(7^2 \cdot 41) = 7^2 \cdot 41^2 = (7 \cdot 41)^2 = 287^2$$

9. Tenemos que $b < 3c$, por tanto al multiplicar a ambos lados por 2 obtenemos $2b < 6c$ y así $a < 2b < 6c$. Pero $c < 4d$ que al multiplicar a ambos lados por 6 tenemos que $6c < 24d$, así $a < 2b < 6c < 24d$ y como $d < 40$ al multiplicar a ambos lados por 24 tenemos que $24d < 24 \cdot 40 = 960$. Lo que nos indica que $a < 960$, Por lo tanto, el valor más grande que podría alcanzar a es 959.

10. Como AD es bisector, entonces $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD$. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

$$\sphericalangle CAD + \sphericalangle BCA + 100° = 180°$$

   Luego
$$\sphericalangle CAD + \sphericalangle BCA = 80° \qquad (1)$$

   y como, por águlos suplementarios $\sphericalangle BDA = 80°$, entonces

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + 80° = 180°$$

Como $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BCA$, entonces

$$\sphericalangle CAD + 2\sphericalangle BCA = 100° \qquad (2)$$

Al restar las ecuaciones (1) y (2) obtenemos que $\sphericalangle BCA = 20°$.

11. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ los nueve números en orden creciente. Tenemos que

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{9} = a_5$$

que es lo mismo que tener

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 9a_5 \qquad (\star)$$

Pero también tenemos que

$$\frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{5} = 68 \quad \text{y} \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 44$$

Por lo tanto

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 340$$

y

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 220$$

Al sumar estas dos últimas obtenemos

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 560$$

Por tanto si le sumamos a_5 a la ecuación $(\star)$, obtenemos que $10a_5 = 560$ lo que implica que $a_5 = 56$. así

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 9a_5 = 9(56) = 504$$

12. Sabemos que un número primo p tiene 2 divisores positivos, 1 y p y que si tenemos una potencia de p, es decir p^n donde n es un número entero positivo. este tiene como divisores

$$1, p, p^2, p^3, \ldots, p^{n-1}, p^n$$

Es decir que p^n tiene $n+1$ divisores. Por otro lodo, si tenemos la multiplicación de dos primos $p \cdot q$, entonces p tiene 2 divisores positivos y q tiene 2 divisores positivos de modo que $p \cdot q$ tiene 4 divisores positivos $\{1, p, q, p \cdot q\}$. Lo mismo ocurre si tenemos la multiplicación de dos potencias de primos $p^n \cdot q^m$, donde m y n son números enteros positivos. Esta tiene $(n+1) \cdot (m+1)$ divisores positivos.

Utilicemos esto para resolver el problema. Los números que tienen 15 divisores son los que son de la forma $p^2 \cdot q^4$ donde p y q son primos. Por tanto, los que estamos buscando son $2^2 \cdot 3^4, 3^2 \cdot 2^4, 5^2 \cdot 2^4$, ya que cualquier otra combinación de números primos p y q, seria mayor que 500. Por tanto sólo hay 3 que cumplen, las dos condiciones.

13. Debemos analizar los dígitos pares en cada número del 1 al 100. Por ejemplo, el digito 2 aparece en los siguientes números

$$\{2, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92\}$$

Es decir, aparece 20 veces. De forma similar ocurre con los pares $4, 6, 8$. Así cada dígito par aparece 20 veces desde el 1 hasta el 100. Luego $20(2+4+6+8) = 400$.

14. Representemos por (E) a Edmundo, (C) a Carlos y (F) a Fernando. Así sabemos que $E + C + F = 150$ y que al final quedaron con la misma cantidad de dinero, es decir cada uno quedó con \$50. Veamos y resolvamos las ecuaciones para cada uno.
Edmundo

$$\begin{aligned} E - \frac{1}{2}E + 10 + 2 &= 50 \\ \frac{1}{2}E + 12 &= 50 \\ \frac{1}{2}E &= 38 \\ E &= 76 \end{aligned}$$

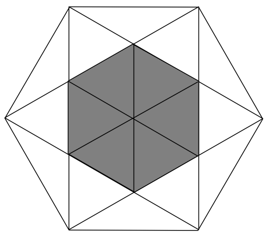
Fernando

$$\begin{aligned} F+\frac{1}{4}E+10-2 &= 50 \\ F+\frac{1}{4}(76)+8 &= 50 \\ F+19+8 &= 50 \\ F &= 23 \end{aligned}$$

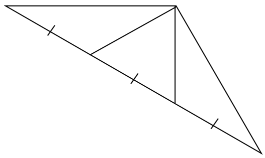
15. Para que siempre haya monedas de las dos denominaciones las de 25¢ deben ir en múltiplos de 2 ya que haciendo esto siempre se pueden poner monedas de 10¢ para completar los \$10. Así podemos sólo tener $2, 4, 6, \ldots, 34, 36, 38$ monedas de 25¢. Por tanto, lo podemos hacer de 19 formas.

16. Notemos que la partícula para llegar al punto $(1,0)$ toma un minuto, para llegar al punto $(0,2)$ toma 4 minutos, para llegar al punto $(3,0)$ toma 9 minutos, para llegar al punto $(0,4)$ toma 16 minutos. Notemos que cada vez que llega a un punto de la forma $(n,0)$ con n impar, se toma n^2 minutos ó de la forma $(0,n)$ con n par, se toma n^2 minutos. Como 2 horas es equivalente a 120 minutos, observemos que al punto $(11,0)$ llegamos en 121 minutos, por lo tanto, en el minuto 120 estaremos en el punto anterior, es decir, $(10,0)$.

17. Trazamos las diagonales del haxágono pequeño como lo vemos en la figura



Notemos que tenemos 12 triángulos equilateros y 6 triángulos isosceles. Veamos que todos los triángulos tienen la misma área. Para esto tomamos la siguiente porción de figura y notamos que los tres lados marcados son iguales.



Como la altura también es igual, entonces los triángulos tienen la misma área por lo tanto los 18 triángulos de la figura tienen la misma área. Como el hexágono sombreado tiene 6 triángulos, entonces el hexágono sombreado es una tercera parte del grande.

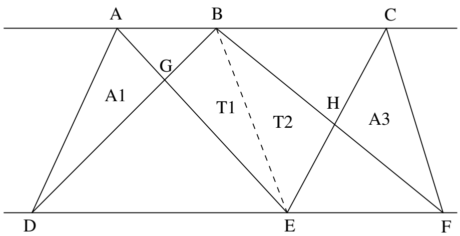
18. Podemos empezar a hacer las sumas hasta encontrar un patrón empezando por 39

	Término
39	1
$3^2+9^2=90$	2
$9^2+0^2=81$	3
$8^2+1^2=65$	4
$6^2+5^2=61$	5
$6^2+1^2=37$	6
$3^2+7^2=58$	7
$5^2+8^2=89$	8
$8^2+9^2=145$	9
$1^2+4^2+5^2=42$	10
$4^2+2^2=20$	11
$2^2+0^2=4$	12
$4^2=16$	13
$1^2+6^2=37$	14

Se repiten el 1 y el 6 en el término número 13 lo que significa que la suceción de números se empieza a repetir. Esta se repite cada 8 números, En los términos de la forma $8n+1$ para $n \geq 1$ se obtiene 145. Como $2009 = (8 \cdot 251) + 1$, entonces el término que ocupa la posición 2009 es 145.

19. Sabemos que los primos *Locos* de un dígito son $2, 3, 5, 7$. A partir de estos podemos construir los demás primos *Locos* de dos. Para obtener los primos *Locos* de dos dígitos podemos agregar un dígito a la derecha o a la izquierda de los primos *Locos* $2, 3, 5, 7$.
Verificamos cuales de los números así obtenidos son primos obteniendo que los primos *Locos* de dos dígitos son $23, 37, 53, 73$.
Los primos *Locos* de tres dígitos se construyen agregándole un dígito a la derecha o la izquierda a un primo *Loco* de dos dígitos y verificando si el número resultante es primo, haciendo esto el único primo *Loco* que conseguimos de tres dígitos es 373.
Para conseguir un primo *Loco* de cuatro dígitos debemos agregar un dígito a la derecha o la izquierda del 373 y obtener un número primo. Se puede verificar facilmente que ninguno cumple la condición. Por lo tanto los primos Locos son 9.

20. Trazamos la diagonal BE, así $A2 = T1 + T2$.



Ahora notemos que el área del $\triangle ADB$ es igual al área del $\triangle AEB$ ya que tienen la misma base AB y la misma altura. Además tienen en común el triágulo AGB. De donde deducimos que $A1 = T1$. De manera similar notamos que los triágulos $\triangle BEC$ y $\triangle BFC$ tienen la misma área, ya que tienen la misma base BC y la misma altura. Además tienen en común el triángulo BHC. Por tanto, $T2 = A3$, lo que nos lleva a concluir que $A2 = A1 + A3$.

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

Primera Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL SUPERIOR (10mo, 11mo y 12mo grado)

1. Supongamos que los tres números son x, y y z, sabemos que

$$x + y + z = 80 \tag{1}$$
$$x + y = 60 \tag{2}$$
$$x + z = 20 \tag{3}$$

Sumando (2) y (3) obtenemos

$$2x + y + z = 80$$

Y si a esta última le restamos la ecuación (1), obtenemos que $x = 0$. Por tanto, el producto $xyz = 0$.

2. Veamos en la siguiente tabla las posibles sumas que pueden dar los dados

Dados	3	4	5	6	7	8
1	4	5	6	7	8	9
2	5	6	7	8	9	10
3	6	7	8	9	10	11
4	7	8	9	10	11	12
5	8	9	10	11	12	13
6	9	10	11	12	13	14

Notamos que la suma que aparece más veces es el 9.

3. Veamos el patrón que se forma cuando calculamos las sumas en los primeros términos

$$S_1 + S_2 = 1 + 1 - 2 = 0$$
$$S_2 + S_3 = 1 - 2 + 1 - 2 + 3 = 1$$
$$S_3 + S_4 = 1 - 2 + 3 + 1 - 2 + 3 - 4 = 0$$
$$S_4 + S_5 = 1 - 2 + 3 - 4 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 1$$

Si continuamos así sucesivamente, notamos que en general, las sumas consecutivas tienen dos opciones,

$$S_{2n} + S_{2n+1} = 1 \quad \textbf{ó} \quad S_{2n+1} + S_{2n} = 0$$

Por tanto, $S_{2008} + S_{2009} = 1$.

4. Vemos que $n^2 + n = n(n+1)$. Esto quiere decir que el número se factoriza, pero si tomamos $n = 1$ tenemos que $1 \cdot 2 = 2$ que es un número primo. Para los demás naturales mayores que 1, el número siempre se puede factorizar. Por lo tanto, sólo para un número natural se satisface que $n^2 + n$ es un número primo.

5. La sucesión de números empieza en 20 y vamos construyendo los términos de la sucesión como se muestra en la siguiente columna

$$\begin{array}{rr}
20 & \textit{par} \\
\frac{20}{2} = 10 & \textit{par} \\
\frac{10}{2} = 5 & \textit{impar} \\
3 \cdot 5 + 1 = 16 & \textit{par} \\
\frac{16}{2} = 8 & \textit{par} \\
\frac{8}{2} = 4 & \textit{par} \\
\frac{4}{2} = 2 & \textit{par} \\
\frac{2}{2} = 1 & \textit{impar} \\
3 \cdot 1 + 1 = 4 & \textit{par}
\end{array}$$

Note que se empieza a repetir el patrón $4, 2, 1$. A partir del sexto término, todos los términos de la forma $3n$ son iguales a 4, todos los términos de la forma $3n+1$ son iguales a 2 y todos los términos de la forma $3n + 2$ son iguales a 1. Como $2009 = 3 \times 669 + 2$. Entonces, el término 2009 de la sucesión es igual a 1.

6. En total hay 40 niños. Como el 60 % de 40 es igual a 24. Entonces 24 estudiantes son los que desean ir a la fiesta. Como hay sólo 22 alumnos, entonces hay por lo menos 2 alumnas que desean ir a la fiesta.

7. Separemos los números del 1 al 20 en dos grupos:

$$\begin{aligned}\textbf{Grupo 1}&: 1, 2, 3, 4, 5, 16, 17, 18, 19, 20\\ \textbf{Grupo 2}&: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\end{aligned}$$

Si seleccionamos cualquier número del 1 al 20 este número está en uno de los dos grupos e inmediatamente hay un número en el otro grupo cuya resta es 5 luego hay que descartarlo. Esto demuestra que a lo más se pueden seleccionar 10 números que cumplan la condición. Por otro lado, los números del grupo 1 cumplen la condición. Así que el máximo valor de n es 10.

8. Tenemos tres posibilidades: que $\frac{p-1}{p+1} = \frac{1}{2}$, $\frac{p-1}{p+1} = \frac{3}{2}$ ó $\frac{p-1}{p+1}$ sea entero no negativo. Si $\frac{p-1}{p+1} = \frac{1}{2}$, entonces $p = 3$. Si $\frac{p-1}{p+1} = \frac{3}{2}$, entonces $p = -5$. Supongamos que $\frac{p-1}{p+1} = c$ donde c es un número natural o cero, si despejamos para p, obtenemos $p = -\left(\frac{c+1}{c-1}\right)$, si tomamos $x = c - 1$, entonces, $x + 2 = c + 1$, asi tenemos que

$$p = -\left(\frac{x+2}{x}\right) = -1 - \frac{2}{x}$$

Como p es un número entero, $\frac{2}{x}$ debe ser un entero, por lo tanto, $x = \pm 1, \pm 2$. Si $x = 1$ entonces $p = -3$; si $x = -1$ entonces $p = 1$; si $x = 2$ entonces $p = -2$ y si $x = -2$ entonces $p = 0$. Para $p = 0$ no se cumple que $4^{\frac{p-1}{p+1}}$ es un número entero. Luego, de esta forma sólo hay tres soluciones y adiccionándole las primeras dos tenemos un total de 5 soluciones.

9. Consideremos el rectángulo con medidas a y b. El área y el perímetro del rectángulo son ab y $2a+2b$ respectivamente. Luego debemos

resolver la siguiente ecuación

$$ab = 2a + 2b + 2009$$

que es equivalente a resolver

$$(a-2)(b-2) = 2013$$

Para esto podemos encontrar todas las posibles factorizaciones de 2013 y así tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
(a-2)(b-2) &= 2013 \cdot 1 \\
(a-2)(b-2) &= 671 \cdot 3 \\
(a-2)(b-2) &= 183 \cdot 11 \\
(a-2)(b-2) &= 61 \cdot 33
\end{aligned}$$

Al resolver cada una de estas tenemos que

$$\begin{aligned}
a-2 &= 2013 & b-2 &= 1 \\
a &= 2015 & b &= 3 \\
a-2 &= 671 & b-2 &= 3 \\
a &= 673 & b &= 5 \\
a-2 &= 183 & b-2 &= 11 \\
a &= 185 & b &= 13 \\
a-2 &= 61 & b-2 &= 33 \\
a &= 63 & b &= 35
\end{aligned}$$

y como todas las combinaciones cumplen la ecuación, tenemos que existen 4 soluciones.

10. Solucionaremos el ejercicio por el complemento, es decir, buscamos el total de números con cuatro dígitos, para luego restarle la cantidad de números que tengan tres dígitos consecutivos iguales, para de esta forma obtener la cantidad de números que no tienen tres dígitos consecutivos iguales.

Primero encontraremos los números de cuatro dígitos que tengan tres dígitos consecutivos iguales. Notemos que tenemos tres estilos de estos números. Si $a \neq 0$, $aaab$ con $a \neq b$ tenemos $9 \times 9 = 81$ números; 9 posibilidades por seleccionar a ya que no puede ser cero y 9 posibilidades para seleccionar b ya que no puede ser igual al valor de a. Pero también si $b \neq 0$, $baaa$ con $b \neq a$ tenemos otros $9 \times 9 = 81$ números. Por otro lado, si $a \neq 0$, $aaaa$ el cual nos da 9 números más. Por lo tanto, tenemos en total $81 + 81 + 9 = 171$ números de cuatro dígitos que tienen tres dígitos repetidos. Así que de los 9000 números de cuatro dígitos que tenemos nos quedan 8829 números de cuatro dígitos que no tienen tres dígitos consecutivos.

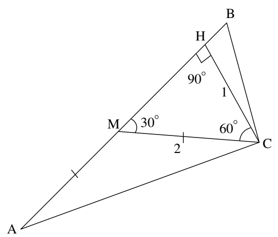
11. Como a es un entero positivo, entonces la distancia entre a y $\frac{1}{a}$ es $a - \frac{1}{a}$. Luego podemos encontrar el valor de a en la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} a - \frac{1}{a} &= \frac{80}{9} \\ \frac{a^2 - 1}{a} &= \frac{80}{9} \\ 9a^2 - 80a - 9 &= 0 \\ (9a + 1)(a - 9) &= 0 \end{aligned}$$

Así $a = 9$, lo que significa que

$$a + \frac{1}{a} = 9 + \frac{1}{9} = \frac{81 + 1}{9} = \frac{82}{9}$$

12. Notemos que el triángulo MHC es un triángulo especial $30° - 60° - 90°$



Por tanto el $\sphericalangle HCM = 60°$ y el $\sphericalangle CMH = 30°$. Así

$$\sphericalangle AMC = 180° - 30° = 150°$$

y como $\triangle AMC$ es isósceles, entonces $\sphericalangle A = \dfrac{30°}{2} = 15°$.

13. Si el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11\}$ contiene los números que tiene Beatriz, entonces Pablo no está correcto en su afirmación ya que no cumple la condición que la suma de dos números es divisible por 8. Ahora para los números que tomó Pablo, trataremos de construir un conjunto de cinco números que no cumpla la condición, como hicimos en el caso de Beatriz. Notemos que un número natural se puede escribir de la forma

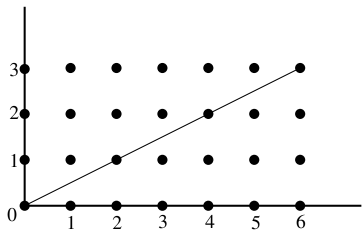
$$7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5 \text{ ó } 7n+6$$

Si tomamos por ejemplo, un número de la forma $7n+3$, no podemos tomar otro número de esta misma forma, ya que su resta da múltiplo de 7. Así todos los números deben ser de diferente forma, por otro lado consideremos las dos columnas siguientes:

$$\begin{array}{ll} 7n & \\ 7n+1 & 7n+4 \\ 7n+2 & 7n+5 \\ 7n+3 & 7n+6 \end{array}$$

Notemos que a los números de la primera columna no le podemos agregar ninguno de los de la segunda columna debido a que la suma de alguno de ellos es un múltiplo de 7 y viseversa. Por lo tanto, sólo la afirmación de Beatriz es correcta.

14. En el ejemplo, tenemos un rectángulo de puntos que podemos colocar dentro de un plano cartesiano como lo vemos en la siguiente figura



Al hallar la pendiente de la recta con los puntos $(0,0)$ y $(6,3)$ tenemos que $m = \frac{1}{2}$. Esto lo que representa es que en la recta por cada 2 movimientos a la derecha en x hay un movimiento de una unidad hacia arriba en y. De aquí salen los cuatro puntos $(0,0),(2,1),(4,2),(6,3)$. Para lo que estamos buscando, tenemos los puntos $(0,0)$ y $(35,21)$, así tenemos que la pendiente $m = \frac{3}{5}$, es decir, que por cada 5 movimientos a la derecha en x tenemos 3 movimientos hacia arriba en y. De esta manera, obtenemos los puntos:

$$(0,0),(5,3),(10,6),(15,9),(20,12),(25,15),(30,18),(35,21)$$

Los cuales son un total de 8.

15. Sabemos que $x < 1$, Así que verifiquemos cada una de las posibilidades.

    i) $x < 1$ por tanto $\frac{1}{x} > 1$.

    ii) Sabemos que $x(x+1) = x^2 + x > x$, así $\frac{1}{x} > \frac{1}{x(x+1)}$. Por tanto a. es mayor que b.

    iii) Notemos
    $$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \frac{x}{2x+1}$$
    Notemos que $2x+1 > 1$, lo que significa que $1 > \frac{1}{2x+1}$. Al multiplicar por x, tenemos que
    $$1 > x > \frac{x}{2x+1}, \text{ luego } \frac{x}{2x+1} < 1$$
    Así a. mayor que c.

    iv) $x < 1$, por tanto a. mayor que d.

v) Notemos

$$\frac{x}{x+\dfrac{1}{x}}=\frac{x^2}{x^2+1}$$

Notemos que $x^2+1>1$, lo que significa que $1>\dfrac{1}{x^2+1}$. Al multiplicar por x^2, tenemos que

$$1>x>x^2>\frac{x^2}{x^2+1} \quad \text{luego} \quad \frac{x^2}{x^2+1}<1$$

Así a. es mayor que e.

Por lo tanto, la alternativa de mayor valor es $\dfrac{1}{x}$.

16. Escribamos a n como $n=2^a b$, donde b no es divisible por 2. Sea x el número de divisores de b. El número de divisores de n es $x(a+1)$. Además, el número de divisores de $n2^n=b2^{n+a}$ es igual al número de divisores de b multiplicado por el número de divisores de 2^{n+a}, es decir, $x(n+a+1)$. Como $n2^n$ tiene 2008 divisores más que n, entonces $x(n+a+1)=x(a+1)+2008$. Por lo tanto $x\cdot n=2008$. Luego $x=\frac{2008}{n}$. Como x es entero, entonces n tiene que ser divisor de 2008. Verificando los divisores de 2008 notamos que $n=1004$ satisface la condición. Es decir, $1004=(2^2)(251)$ tiene 6 divisores mientras que $1004(2^{1004})=251(2^{1006})$ tiene 2012 divisores. Por lo tanto la respuesta es $1+0+0+4=5$.

17. Usaremos el resultado que establece que si el residuo al dividir un número m por n es r, entonces el residuio al dividir m^s entre n sigue siendo r.
Verifiquemos que cada número dado divide a la resta $371^{40}-41^{40}$ utilizando esta propiedad.
Con el 2. $371=2(180)+1$, por tanto el residuo que deja 371^{40} al dividirlo por 2 es 1. También $41=2(20)+1$, por tanto el residuo que deja 41^{40} al dividirlo por 2 es 1, Por lo tanto, el residuo que deja la resta es $1-1=0$, es decir, 2 divide a $371^{40}-41^{40}$.
Con el 3. $371=3(123)+2$, por tanto el residuo que deja 371^{40} al dividirlo por 3 es 2. También $41=3(13)+2$, por tanto el residuo

que deja 41^{40} al dividirlo por 3 es 2, Por lo tanto, el residuo que deja la resta es $2-2=0$, es decir, 3 divide a $371^{40}-41^{40}$.
Con el 5. $371=5(74)+1$, por tanto el residuo que deja 371^{40} al dividirlo por 5 es 1. También $41=5(8)+1$, por tanto el residuo que deja 41^{40} al dividirlo por 5 es 1, Por lo tanto, el residuo que deja la resta es $1-1=0$, es decir, 5 divide a $371^{40}-41^{40}$.
Con el 11. $371=11(33)+8$, por tanto el residuo que deja 371^{40} al dividirlo por 11 es 8. También $41=11(3)+8$, por tanto el residuo que deja 41^{40} al dividirlo por 11 es 8, Por lo tanto, el residuo que deja la resta es $8-8=0$, es decir, 11 divide a $371^{40}-41^{40}$.
Por tanto, los cuatro números dividen a $371^{40}-41^{40}$.

18. Sean

$$a^2=b+2 \tag{1}$$
$$b^2=c+2 \tag{2}$$
$$c^2=a+2 \tag{3}$$

Si $a=2$, entonces usando (1) se tiene que $b=2$ y usando (2) o (3) se obtiene $c=2$. De igual manera se puede probar que si $b=2$ o $c=2$, entonces $a=b=c=2$.

Supongamos que a,b,c son números positivos diferentes de 2. Si $a>2$, $a^2>4$, entonces por (1) se tiene $b+2>4$, de donde $b>2$ y de forma similar por (2) se tiene que $c>2$. Ahora bien, como $a^2>a+2$, entonces $a>\sqrt{a+2}$, así por (3) se tiene que $a>c$, de la misma forma, por (2) se tiene que $b<c$ y por (1) se tiene que $a<b$. Luego $a<b<c<a$, lo cual es un absurdo. Lo mismo sucede si se supone que $b>2$ ó $c>2$. Entonces $a,b,c<2$. Pero si $a<2$, $a+2>a^2$, de donde $\sqrt{a+2}>a$, entonces por (3) se tiene que $c>a$. Similarmente si suponemos que $b<2$, por (1) se tiene que $a>b$. Por último si tomamos $c<2$, entonces por (2), obtenemos $b>c$. Luego $c>a>b>c$, lo cual es nuevamente absurdo.

Por lo tanto la única solución positiva para este sistema de ecuaciones es $a=b=c=2$

19. De los 9000 números de cuatro cifras, sólo hay 1000 que son divisibles por 9. Contemos los números que no son Cangri de estos

1000. Para ello debemos utilizar la regla de divisibilidad del 9 que dice que un número es divisible por 9 si la suma de sus dígitos es divisible por 9. Veamos cuantos números de a lo sumo tres cifras suman 9, esto debido a que el 0 no suma. estos son:

$$\{9, 18, 27, 36, 45, 117, 126, 135, 144, 225, 234, 333\}$$

Ahora los que suman 18.

$$\{99, 198, 288, 297, 387, 396, 486, 477, 585, 495, 567, 666\}$$

Continuamos con 27.

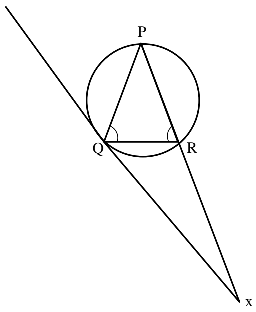
$$\{999\}$$

La siguiente tabla nos dice la forma de contar. x, y y z representan dígitos diferentes, por ejemplo, para el caso x, se tiene únicamente el 9 y por lo tanto, la unica combinación de 4 cifras es el 9000, así, en total hay 1 sólo número de este estilo. Para el caso xx, tenemos únicamente el 99, con tres posibles combinaciones: 9900, 9090 y 9009. Por lo tanto hay tres números de esta forma.

Tipo	Cantidad	Combinaciones	Total
x	1	1	1
xx	1	3	3
xy	4	6	24
xxy	6	9	54
xxx	3	3	9
xyz	10	18	180
		Total	271

Por tanto, de los números que no son Cangri son 271. En conclusión hay 729 números Cangri.

20. En la figura



Note que $\sphericalangle P = \sphericalangle RQX$ ya que uno es un ángulo inscrito y el otro un ángulo semiinscrito y los dos abren el mismo arco. Además, el $\sphericalangle XRQ = \sphericalangle P + \sphericalangle PQR$ por ser un ángulo exterior al $\triangle PQR$. Por otro lado el $\sphericalangle PQX = \sphericalangle PQR + \sphericalangle RQX$. Así, $\sphericalangle XRQ = \sphericalangle PQX$. Entonces los triángulos $\triangle PQX$ y $\triangle QRX$ son semejantes ya que $\sphericalangle X$ es común en los dos y $\sphericalangle XRQ = \sphericalangle PQX$
De esta semejanza tenemos que

$$\frac{RX}{QX} = \frac{QR}{PQ} = \frac{2}{3}$$
$$RX = \frac{2}{3}QX \qquad (\star)$$

Por otro lado

$$\frac{QX}{PQ} = \frac{RX}{QX}$$

entonces

$$\frac{QX}{RX+3} = \frac{2}{3} \qquad \text{de donde}$$
$$QX = \frac{2}{3}(RX+3)$$

Reemplazando QX en $(\star)$ tenemos que

$$RX = \frac{4}{9}(RX+3)$$

$$RX = \frac{4RX}{9} + \frac{4}{3}$$

$$
\begin{aligned}
RX - \frac{4RX}{9} &= \frac{4}{3} \\
\frac{5RX}{9} &= \frac{4}{3} \\
RX &= \frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

Segunda Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL ELEMENTAL(4to, 5to y 6to grado)

1. Si desde el principio de la fila Teresita es la número 25, esto nos indica que delante de ella hay 24 personas, por otro lado, si ella es la número 12 desde el final de la fila, nos indica que detrás de ella hay 11 personas. Por lo tanto en la fila está ella junto con $24 + 11 = 35$ personas más. Es decir en la fila del banco hay 36 personas.

2. Veamos que si ella gira 360°, la nariz del canguro estará mirando el $*$ nuevamente y lo que le faltaría por girar serian 270°. Si gira 90° más se encontrará mirando el punto **B** y lo que le restaría por girar serian 180°. Por lo tanto, la nariz del canguro estará mirando el punto **E**, luego de girar los 630°.

3. Si realizamos todas las posibles combinaciones obtenemos los siguientes 10 resultados:

1+2=3	2+3=5	3+4=7	4+5=9
1+3=4	2+4=6	3+5=8	
1+4=5	2+5=7		
1+5=6			

   Como lo que necesitamos es que los resultados sean diferentes, podemos contar que hay 7 sumas diferentes.

4. Como una vaca da $6,000$ litros de leche en un año, entonces, 8 vacas darán un total de $6,000 \times 8 = 48,000$ litros de leche en un año. Así, en 8 años las 8 vacas darán un total de:

$$8 \times 48,000 = 384,000 \text{ litros}$$

5. Como debemos identificar el patrón que están siguiendo los números de vagón a vagón, tenemos que ver cómo obtener el número 6 que se encuentra en el segundo vagón a partir del número 4 que se encuentra en el primero. Si al primer número le restamos 1 y a su resultado lo multiplicamos por dos obtenemos el número 6; es decir, $4 - 1 = 3 \times 2 = 6$. Si realizamos este mismo procedimiento con el número del segundo vagón, obtendremos el número del tercer vagón, veamos: $6 - 1 = 5 \times 2 = 10$. Si continuamos con esta misma secuencia obtendremos el número que pertenece al último vagón. Así, tomamos el número 34 y le realizamos este mismo procedimiento; $34 - 1 = 33 \times 2 = 66$. Por lo tanto, el número que va en el último vagón es el 66.

6. Podemos listar todas las posibilidades para ubicar dos niñas en cada tienda de campaña. La lista que se puede generar es la siguiente:

Posibilidad	Tienda 1	Tienda 2
1	Anita y Lucía	Juanita y María
2	Anita y Juanita	Lucía y María
3	Anita y María	Lucía y Juanita
4	Lucía y Juanita	Anita y María
5	Lucía y María	Anita y Juanita
6	Juanita y María	Anita y Lucía

   Por lo tanto, tenemos que podemos ubicar de 6 formas diferentes a las niñas en las dos tiendas de campaña.

7. Si contamos el número de múltiplos de 7 del 1 al 100, obtenemos que son 14. Y si por otro lado contamos los múltiplos de 7 del 1 al 1,000, tenemos que hay 142. Por lo tanto, para encontrar cuantos múltiplos de 7 hay entre el 100 y el 1,000, simplemente restamos a 142, los 14 que hay de 1 a 100. Así, obtenemos que el número de múltiplos de 7 del 1 al 1,000 son $142 - 14 = 128$.

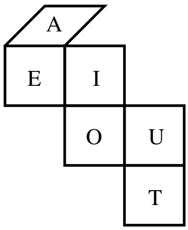
8. Para tener un mes de tres domingos con días pares se necesita tener un mes con 5 domingos. Y para obtener un mes con 5 domingos, es necesario que el primer domingo del mes sea el dia 1, 2 ó 3;

si elegimos el 1 ó el 3, obtendremos unicamente en el mes dos domingos con numero par. Así, si elegimos el 2 como el primer domingo del mes obtendremos lo siguiente:

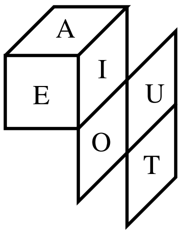
D	L	M	W	J	V	S
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Por lo tanto, como vemos en el calendario anterior el día 20 corresponderá a un día Jueves.

9. Realizaremos primero el pliegue de la arista que divide a A y a E como se muestra en la figura

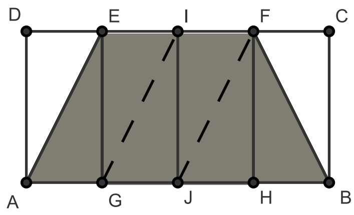


Si ahora doblamos por la arista que divide a E y a I, ya obtenemos las caras frontales del cubo, tal como se muestra a continuación



Note que si hacemos un pliegue más, obtenemos que la cara opuesta a la cara A es la cara O y por lo tanto, el opuesto a la cara E será la cara U.

10. Si dividimos el rectangulo inicial de la siguiente forma:

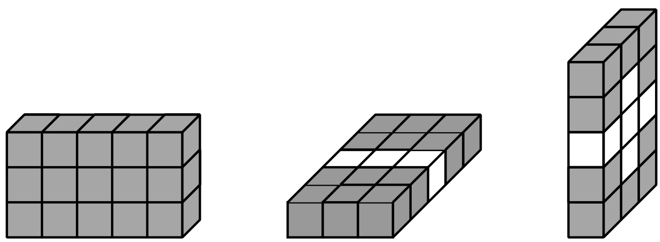


Obtenemos 8 triángulos de igual tamaño; ya que son obtenidos a partir de la diagonal de un rectángulo. Como el área total del rectángulo es 12 unidades cuadradas, entonces, el área de cada uno de las triángulos será de 1.5 unidades cuadradas. Por lo tanto, los dos triángulos que no pertenecen al trapecio tendrán un área de 3 unidades cuadradas. Así el área del trapecio será de $12 - 3 = 9$ unidades cuadradas.

11. Notemos que en cada arista del cubo original quedará un vértice cuando se hagan los cortes, por lo tanto el sólido tendrá 12 vértices.

12. Dado que la cabina 8 se encuentra en el punto más alto y la 25 en el punto más bajo de la Rueda Gigante, tenemos entonces que hay el mismo número de cabinas entre la cabina 8 y la 25 por la izquierda, que por la derecha. Entonces, como entre el 8 y el 25 hay 16 números, así, en ambos lados habrá un total de 32 cabinas y si sumamos la cabina 8 y la 25, tendremos que en la Rueda Gigante hay 34 cabinas.

13. En las siguientes figuras se muestran los cubos que se han extraído para la construcción del túnel



1 2 3

Note que en la figura 1 hay 15 cubos pequeños, en la figura 2 tenemos que tres de los cubos pequeños ya fueron contados en la figura 1, así que en la figura 2 hay 12 cubos pequeños. Por último, en la figura 3, hay solo 10 cubos pequeños, ya que los restantes fueron contados en las figuras 1 y 2. Así, en la construcción del túnel, hay $15 + 12 + 10 = 37$ cubos pequeños. Por lo tanto, como en el cubo grande hay 125 cubos pequeños, al restarle los cubos del túnel, obtenemos el total de cubos restantes. Es decir, hay un total de $125 - 37 = 88$ cubos pequeños.

14. Dado que Toño tiene el mismo número de hermanos que de hermanas, veamos las posibilidades que hay para que a su vez se satisfaga la condición de que su hermana Nina tenga el doble de hermanos que de hermanas. Comencemos suponiendo que Toño tiene un hermano y una hermana, por lo tanto, en su familia habrá dos varones y una hembra, así, Nina tendrá dos hermanos y ninguna hermana, lo cual no satisface la condición de que Nina tiene el doble de hermanos que de hermanas. Ahora supongamos que Toño tiene dos hermanos y dos hermanas, esto es, en su familia hay tres varones y dos hembras, con lo cual Nina tendrá tres hermanos y una hermana, lo cual tampoco satisface la condición inicial. Si ahora suponemos que Toño tiene tres hermanos y tres hermanas, su familia estará compuesta por cuatro varones y tres hembras, lo cual indica que Nina tendrá cuatro hermanos y dos hermanas, lo cual satisface la condición de tener el doble de hermanos que de hermanas. Por lo tanto, Toño tiene 6 hermanos en total.

15. Lo que deseamos encontrar es el dígito de las unidades del número 4^{2010}, para esto veamos el siguiente patrón que siguen las potencias de 4:

$$
\begin{aligned}
4^1 &= 4 \\
4^2 &= 16 \\
4^3 &= 64 \\
4^4 &= 256 \\
4^5 &= 1024 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si nos fijamos en el dígito de las unidades en cada resultado, nos damos cuenta que se obtiene el número 6 si la potencia es un numero par y se obtiene el número 4 si la potencia es un número impar. Así, el dígito de las unidades del número 4^{2010} es 6.

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

Segunda Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL INTERMEDIO(7mo, 8vo y 9no grado)

1. Sean $x =$ costo de un caramelo y $y =$ costo de un chocolate. Sabemos que los chocolates cuestan el doble que los caramelos, así que: $y = 2x$ y como tenemos que $3y + 2x = 16$, podemos reemplazar y, para que la ecuación quede en términos de la variable x para poder resolverla:

$$\begin{aligned} 3(2x) + 2x &= 16 \\ 6x + 2x &= 16 \\ 8x &= 16 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   Así obtenemos que cada caramelo tiene un costo de \$2, luego el costo de cada chocolate es de \$4. Por lo tanto el costo de 2 chocolates y 3 caramelos, es $2(4) + 3(2) =$\$14.

2. Notemos que la figura 1, posee 3 cuadritos de lado. Así que al ubicar una de ellas sobre la figura 2, sin importar como se coloque, sólo restan dos posibles formas de ubicar la figura 1 sin solaparla, ya que la figura 2 posee 5 cuadritos de lado por 5 de alto. Entonces, podremos poner a lo más tres veces la figura 1 sobre la figura dos sin que estas se sobrepongan.

3. Calculemos, el área total del rectángulo, esto es $A = b \cdot h = 15 \cdot 9 = 135\text{cm}^2$. Como cada uno de los cuadrados de las esquinas tiene un área de 4cm^2, los cuatro cuadrados tendrán un área de 16cm^2. Por lo tanto si restamos esto al área total del rectángulo, obtendremos que el área de la figura resultante es $135 - 16 = 119\text{cm}^2$.

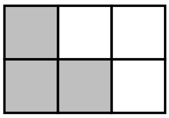
4. Sea $x =$ la edad de uno de los trillizos y $y =$ la edad de Eva. Puesto que eva es 4 años mayor que los trillizos entonces $y = x + 4$. Tengamos en cuenta que hace tres años la edad de los trillizos

era $x - 3$, por lo tanto en esa misma epoca la edad de Eva era $(x + 4) - 3 = x + 1$. Así que en total

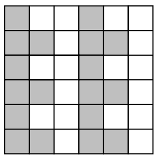
$$\begin{aligned} (x+1) + 3(x-3) &= 24 \\ x + 1 + 3x - 9 &= 24 \\ 4x - 8 &= 24 \\ 4x &= 32 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Asi, la edad de cada uno de los trillizos actualmente es de 8 años, por lo tanto, la edad de Eva es 12 años.

5. Si unimos dos piezas de rompecabezas, obtenemos que se forma el siguiente rectángulo de dos por tres



Como lo que deseamos obtener es un cuadrado, debemos encontrar la forma de obtener el mismo número de cuadritos de largo que de ancho. Para esto vemos que el 6 es el múltiplo común más pequeño entre 2 y 3. Por lo tanto, se requieren 5 más de estos rectángulos para obtener el siguiente cuadrado



Así, tendríamos que tener 12 fichas de rompecabezas para poder formar un cuadrado.

6. Podemos expresar el problema en términos de ecuaciones, de la siguiente manera, Sea r el número de cabezas que posee el dragón rojo y v el número de cabezas que posee el dragón verde. Si el

dragón rojo tuviera 6 cabezas más que el dragón verde, es decir, $r = v + 6$ entonces:

$$\begin{aligned}(v + 6) + v &= 34\\ 2v + 6 &= 34\\ 2v &= 28\\ v &= 14\end{aligned}$$

Obtenemos entonces que el dragón verde tiene un total de 14 cabezas. Por lo tanto, como el dragón rojo tiene 6 cabezas menos que el dragón verde, entonces, el dragón rojo tiene $14 - 6 = 8$ cabezas.

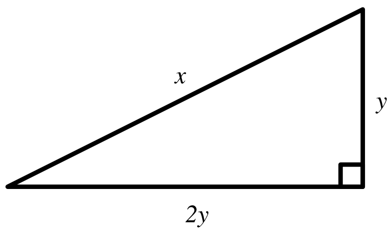
7. Como tenemos dos ángulos del triángulo ACD, entonces el $\measuredangle DAC = 75°$, con lo que podemos concluir que este triángulo es un triángulo isósceles, es decir, el segmento DC es igual al segmento AC. Por hipótesis tenemos que $DC = AB$, entonces $AC = AB$, de donde el triángulo ABC es también un triángulo isósceles. Por lo tanto, $\measuredangle ABC = \measuredangle BCA$. Ahora, como $\measuredangle BAC = 50°$, entonces los ángulos restantes deben medir en total $180° - 50° = 130°$ y como estos dos ángulos son iguales, entonces $\measuredangle ABC = \dfrac{130°}{2} = 75°$.

8. Puesto que el producto de b y c es c, es decir, $b \cdot c = c$, entonces, $b = 1$. Ahora bien, si el producto de los tres dígitos a, b y c es el número de dos dígitos bc, es decir, $a \cdot b \cdot c = bc$, dado que $c = 2$ y $b = 1$, se tiene la ecuación $a \cdot 1 \cdot 2 = 12$. Resolviendo para a, concluimos que el valor de $a = 6$.

9. Como la suma de los números del 1 al 8 es 36, entonces, las cartas que estan en cada caja deben sumar 18. Como tenemos que la caja A únicamente posee tres cartas, ni la carta marcada con el número 1, ni la carta con el número 2 pueden estar en esta caja ya que la suma mas grande de las cartas restantes es 15. Por lo tanto, las cartas marcadas con los números 1 y 2 , siempre deberán estar en la caja B. Si dejamos la carta con el número 3 en la caja A, también estarán en esta caja las cartas 8 y 7, con lo que las

cartas con los números 1,2,4 y 6 estarán en la caja B. Ahora bien, si introducimos la carta marcada con el número 4 en la caja A, entonces, las cartas con los números 6 y 8 también deben estar en A, así, las cartas 1, 2, 3, 5 y 7 estarán en la caja B. Por último, si colocamos la carta marcada con el número 5 en la caja A, las cartas con los números 6 y 7, tambien deben estar en esta caja, con lo que en la caja B restaria ubicar las cartas 1, 2, 3, 4 y 8 en la caja B. Como estas son todas las posibilidades que satisfacen las dos condiciones, entonces, observamos que la única condición que se mantiene en todas las posibilidades, es que la carta con el número 2 esta en la caja B.

10. Sea y la longitud de un lado de un cuadrado, el cual tendría un área de y^2. Entonces, se forma un triángulo rectángulo como se muestra en la siguiente figura.



Aplicando el Teorema de Pitágoras, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
6^2 &= (2y)^2 + y^2 \\
36 &= 4y^2 + y^2 \\
36 &= 5y^2 \\
y^2 &= \frac{36}{5}
\end{aligned}
$$

Entonces tenemos que cada cuadrado tiene un área de $\frac{36}{5}$ decímetros cuadrados. Por tanto, la figura completa, compuesta por 5 cuadrados de estos, tiene un área de $\frac{36}{5} \cdot 5 = 36$ decímetros cuadrados.

11. La primera niña debe jugar contra sus 4 compañeras. La segunda niña al haber jugado ya con la primera, le resta jugar con sus otras 3 compañeras. La tercera niña ya jugó con la primera y segunda niña, por tanto, le hacen falta 2 partidos, la cuarta niña, Únicamente le resta el partido contra la quinta niña y así, la quinta niña ya habrá jugado contra sus otras compañeras. Por tanto, se deben jugar $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ partidos.

12. Al ser un número divisible por 5, se debe tener que su último dígito debe ser 0 ó 5, pero como también es divisible por 4, eliminamos la posibilidad de que este sea 5, con lo cual tenemos que el último dígito es el 0. Ahora bien, para que este número sea divisible por 3 la suma de sus dígitos deberá ser divisible por 3, entonces, el tercer dígito podrá ser 1, 4 ó 7, pero al ser divisible también por 4, el número compuesto por sus dos últimos dígitos deberá ser divisible por 4, luego la única opción que sirve es que este dígito sea el 4. Por lo tanto, el número de cuatro cifras que estaba escrito en la pizarra era el 8640.

13. Como la suma de sus recíprocos tiene que ser 1, las posibilidades que satisfacen estos son: cuando se suman dos veces $\frac{1}{2}$ con lo cual, el número bueno que resulta es el 4 ó bien cuando se suman tres veces $\frac{1}{3}$ de donde 9 es el otro número bueno. Así, los números buenos del 1 al 10 son 4 y 9.

14. Note que al ser 100 el menor número de tres cifras, su triple será un número que contiene un dígito impar. Esto mismo sucederá con todos los numeros que se encuentran entre 100 y 133, ya que si vemos el dígito de las centenas del triple de estos números siempre es 3. El siguiente número de tres cifras es el 134, cuyo triple es el 402, el cual cumple la condición de tener todos sus dígitos pares. Por lo tanto el número que estabamos buscando es el 134.

15. Como primer paso, debemos llevar esta ecuación a una forma factorizada, de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{2}+\frac{5}{y} &= 7\\
\frac{x^2y+10}{2y} &= 7\\
x^2y+10 &= 14y\\
x^2y-14y &= -10\\
y(x^2-14) &= -10
\end{aligned}
$$

Teniendo la ecuación de esta forma, podemos encontrar todos los factores que dan como resultado -10, estos son: -1 y 10, 1 y -10, -2 y 5, 2 y -5. Ahora analizaremos estos casos, para verificar cuales de ellos nos ofrecen una solución entera.

Para el caso en el que $y=-1$ y $x^2-14=10$, resolviendo para x, tenemos que $x=\pm\sqrt{24}$, la cual no resulta ser una solución entera, por lo tanto queda descartada.

Si $y=1$ y $x^2-14=-10$, obtenemos que $x=\pm\sqrt{4}=\pm2$, de donde surgen dos soluciones enteras: $(2,1)$ y $(-2,1)$.

Si $y=-2$ y $x^2-14=5$, entonces, $x=\pm\sqrt{19}$, pero esta solución tampoco es entera, luego queda descartada.

Si $y=2$ y $x^2-14=-5$, tenemos que $x=\pm\sqrt{9}=\pm3$, con lo que obtenemos dos soluciones más; $(3,2)$ y $(-3,2)$.

Si $y=-5$ y $x^2-14=2$, entonces, $x=\pm\sqrt{16}=\pm4$, luego las soluciones $(4,-5)$ y $(-4,-5)$ hacen parte tambien de las soluciones enteras de la ecuación.

Si $y=5$ y $x^2-14=-2$, entonces, $x=\pm\sqrt{12}$, con la cual no obentenemos un valor entero para x, por lo tanto, queda descartada.

Si $y=-10$ y $x^2-14=1$, entonces, $x=\pm\sqrt{15}$, pero de nuevo este resultado no es entero, con lo que se descarta esta posibilidad.

Y por último si $y=10$ y $x^2-14=-1$, entonces, $x=\pm\sqrt{13}$, que tampoco da un resultado entero. Por lo tanto, las soluciones enteras de la ecuación son: $(2,1)$, $(-2,1)$, $(3,2)$, $(-3,2)$, $(4,-5)$ y $(-4,-5)$.

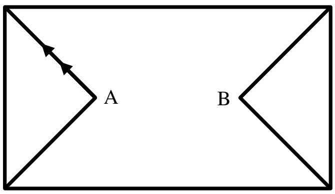
SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

COMPETENCIA PREOLÍMPICA DE MATEMÁTICAS

Segunda Fase 2009-2010

EXAMEN NIVEL SUPERIOR(10mo, 11mo y 12mo grado)

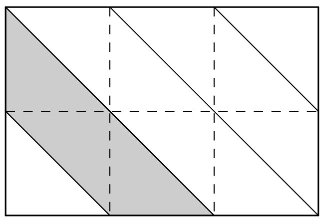
1. Si partimos por la parte indicada en la figura,



nos damos cuenta que hay 4 posibles camino para llegar hasta **B**, si ahora salimos por el otro lado, observamos que hay también 4 posibles caminos. Por lo tanto, en total hay 8 caminos para recorrer de **A** hasta **B**.

2. El número 1664 lo podemos factorizar de la siguiente forma: $1664 = 2^7 \cdot 13$, ahora debemos ajustar este producto con el fin de satisfacer la condición de que la edad del menor sea la mitad del mayor. Entonces veamos que $2^7 = 2^4 \cdot 2^3$ y vemos que si dejamos expresado el producto como: $1664 = 2^4 \cdot 2^3 \cdot 13$, tenemos que el mayor tiene 16 años, el menor tiene 8 años y hay un tercero que tiene 13 años. Así, tenemos que este padre tiene 3 hijos.

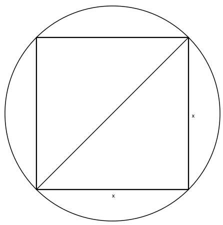
3. Si dividimos la bandera como se muestra en la siguiente figura



obtenemos 12 triángulos que poseen la misma área. Nótese que tres de estos triángulos pertenecen al área que esta sombreada. Ahora, como el área total de la bandera es de $3m^2$, tenemos que cada cuatro triángulos suman un área de $1m^2$, por lo tanto, la parte sombreada de la bandera debe tener un área de $\frac{3}{4}m^2$.

4. Lo que debemos formar son números de tres dígitos, con los siguientes 6 dígitos $0, 1, 3, 4, 6$ y 9. Por la regla de multiplicación tenemos que son: $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$, esto porque el dígito de las centenas debe ser diferente de 0. Note que estos números de tres dígitos no poseen el $2, 5, 7$ y 8, así, tenemos que hay 180 números que no contienen estos dígitos.

5. Sea x el lado del cuadrado, así el perímetro del cuadrado será $4x$.



Note por otro lado, que la diagonal del cuadrado es el diametro del circulo, luego esta diagonal tiene una longitud de 2. Así, que aplicando el Teorema de Pitágoras y resolviendo la ecuación para la variable x tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 2^2 \\ 2x^2 &= 4 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el perimetro del cuadrado será de $4\sqrt{2}$.

6. Si restamos las ecuaciones,

$$xy + yz = 44 \qquad (1)$$
$$xz + yz = 23 \qquad (2)$$

obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} xy - xz &= 21 \\ x(y-z) &= 21 \end{aligned}$$

Si factorizamos el 21, como producto de dos factores, tenemos que se puede escribir como: $21 = 3 \cdot 7$ ó $21 = 1 \cdot 21$.

Si tomamos $x = 3$ y $y - z = 7$, reemplazando en la ecuación (2), tenemos que $3z + (7+z)z = 23$, de donde $3z + 7z + z^2 = 23$, así, al resolver la ecuación cuadrática $z^2 + 10z - 23 = 0$ observamos que no tiene soluciones enteras, por tanto, esta combinación queda descartada. Note que si tomamos $x = 7$ y $y - z = 3$, obtendremos nuevamente la ecuación cuadrática $z^2 + 10z - 23 = 0$, la cual no tiene soluciones enteras, con lo cual también queda descartada.

Ahora si tomamos el otro producto, con $x = 1$ y $y - z = 21$, reemplazando en la ecuación (2) obtenemos que

$$\begin{aligned} z + (21+z)z &= 23 \\ z + 21z + z^2 &= 23 \\ z^2 + 22z - 23 &= 0 \\ (z+23)(z-1) &= 0 \end{aligned}$$

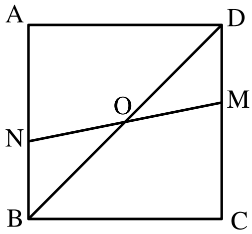
Así, obtenemos que las soluciones son $z = -23$, la cual queda descartada ya que se están pidiendo sólo las soluciones positivas y $z = 1$, de donde $y = 22$. Por tanto la terna solución al sistema inicial es $(1, 22, 1)$.

Por último, si tomamos $x = 21$ y $y - z = 1$, reemplazando en la ecuación (2), obtenemos la misma ecuación cuadrática $z^2 + 22z - 23 = 0$, de la cual obtuvimos como solución $z = -23$ y $z = 1$. De esto, descartamos la primera solución debido a que era negativa.

Así, obtenemos que para la segunda solución si $z = 1$ y $y = 2$, la tripleta que soluciona el sistema será $(21, 2, 1)$.

Por lo tanto, encontramos 2 posibles soluciones para el sistema de ecuaciones dado.

7. Notemos que DB es una diagonal del cuadrado $ABCD$, entonces $\sphericalangle DBA = 45° = \sphericalangle BDA$.



Por otro lado, como $\sphericalangle ONA$ es un ángulo exterior al triángulo BON, entonces $\sphericalangle BON + \sphericalangle NBO = 60°$, pero note que $\sphericalangle NBO = \sphericalangle DBA$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
45° + \sphericalangle BON &= 60° \\
\sphericalangle BON &= 60° - 45° \\
\sphericalangle BON &= 15°
\end{aligned}
$$

Como $\sphericalangle BON$ y $\sphericalangle DOM$ son ángulos opuestos por el vértice, entonces $\sphericalangle BON = \sphericalangle DOM$. Así tenemos que $\sphericalangle DOM = 15°$.

8. Sea $a + (a + 1) + (a + 2) + ... + (a + (k - 1))$, la suma de k números enteros consecutivos, note que $2 \leq k \leq 13$, puesto que si sumamos más de 13 números consecutivos, el resultado de la suma va a ser mayor que 100. Entonces, sumando los términos obtenemos $ka + (1 + 2 + ... + (k - 1))$. Mediante la suma de Gauss, resolvemos el paréntesis obteniendo

$$ka + \frac{k(k-1)}{2}$$

ahora esta suma debe ser 100, entonces simplificando la ecuación

$$ka + \frac{k(k-1)}{2} = 100$$

tenemos que $k(2a+(k-1)) = 200$, de donde podemos inferir que k tiene que dividir a 200. Entonces $k = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50,$ 100 ó 200, pero descartamos cuando $k = 1$ y cuando $k > 13$, ya que se salen del rango de valores de k, por lo tanto restan 5 posibilidades. Cuando $k = 2$, entonces $2a+1 = 100$ y esta ecuación no tiene soluciones enteras. Si $k = 4$, entonces $2a + 3 = 50$, que tampoco tiene solución entera. Si $k = 5$ tenemos que $2a + 4 = 50$, con lo que $a = 18$, así, si sumamos 5 números consecutivos a partir del 18, obtenemos 100 como resultado. Ahora bien, si $k = 8$ entonces, $2a + 7 = 25$, de donde $a = 9$, es decir, que si sumamos 8 números consecutivos a partir del 9 tendremos que la suma de ellos será igual a 100. Por último, si $k = 10$ la ecuación resutaría $2a + 9 = 20$, que no posee solución entera. Por lo tanto, tenemos dos conjuntos de numeros enteros que satisfacen que la suma de numeros consecutivos es igual a 100.

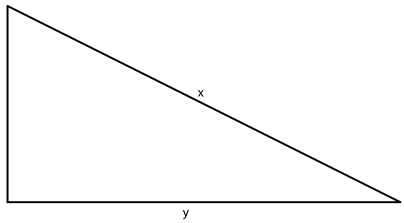
9. Puesto que el área total del cuadrado es igual a 1. El área de los triángulos de base x, será $\frac{1 \cdot x}{2}$. Ahora, como son tres triángulos de igual área cuya suma es el área del cuadrado, se puede plantear la siguiente ecuación:
$$3 \cdot \frac{x}{2} = 1$$
Así, resolviendo para x tenemos que $x = \frac{2}{3}$.

10. Debemos tener en cuenta que la mayor suma que podemos conseguir es 18 la cual es obtenida únicamente por el número 99 y el residuo obtenido al efectuar la división es 9. Ahora veamos que pasa si la suma es 17. Los que números que satisfacen esta suma son el 98 y el 89 y sus residuos son 13 y 4 respectivamente. Para la suma igual a 16 tenemos los números 97, 88 y 79 cuyos residuos son 1, 8 y 15. Si analizamos el 15 observamos que el mayor residuo que se puede otener de este es el 14, por lo tanto, el mayor residuo que se obtiene al realizar esta división entre la suma de los dígitos es el 15

11. Para poder obtener el número más pequeño, debemos utilizar la mayor cantidad de veces el número mas grande de un dígito, es de-

cir, el número 9. Ahora tenemos que el múltiplo de 9 más cercano a 2010 es 223, así, tenemos que nos restaría sumar una cantidad de 3 para obtener el 2010. Por lo tanto, si ubicamos el 3 en el dígito de la izquierda y luego 223 nueves, obtenemos el número natural más pequeño, el cual al sumar sus dígitos se obtiene el 2010. Luego el dígito de la izquierda de este número natural es el 3.

12. Sea x la longitud de la hipotenusa y y el valor de uno de sus catetos, como se muestra en la siguiente figura:



Por el Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + (\sqrt{12})^2 \\ x^2 - y^2 &= 12 \\ (x-y)(x+y) &= 12 \end{aligned}$$

Pero note que el número 12 lo podemos escribir como el producto de dos factores de la siguiente manera: $12 \cdot 1$, $2 \cdot 6$ y $3 \cdot 4$. Por otro lado, tenemos que $x, y > 0$ y también que $x > y$ ya que x es la longitud de la hipotenusa. Así, $x - y < x + y$. Por lo tanto tendremos los siguientes casos:

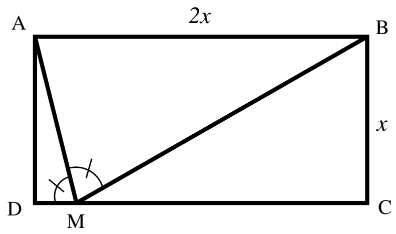
i) Si $x - y = 1$ y $x + y = 12$, entonces, si sumamos estas dos ecuaciones obtenemos que $2x = 13$, para el cual $x = \dfrac{13}{2}$, el cual no es un número entero. Por lo tanto, este no genera un triángulo rectángulo con las condiciones iniciales dadas.

ii) Si $x-y = 2$ y $x+y = 6$, entonces, sumando las dos ecuaciones tenemos que $2x = 8$, por lo tanto $x = 4$, así $y = 2$. Luego este es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 y $\sqrt{12}$ y cuya hipotenusa es 4.

iii) Si $x-y=3$ y $x+y=4$, entonces, sumando las dos ecuaciones obtenemos que $2x = 7$, pero la solución para x no es un número entero, el cual no satisface las condiciones para el triángulo rectángulo requerido.

Así, tenemos que sólo hay un triángulo rectángulo que satisface la condición de que uno de sus catetos y su hipotenusa sean números enteros y cuyo otro cateto mida $\sqrt{12}$.

13. Consideremos la siguiente figura



Note que $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BAM$, por ser alternos internos y como $\sphericalangle AMD = \sphericalangle AMB$, entonces, $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BAM$. Así el triángulo MBA es un triángulo isósceles y con esto tenemos que el segmento AB es igual a segmento MB. Ahora, el triángulo BMC es un triángulo especial 30 60 90, donde $\sphericalangle CBM = 60°$, con lo que $\sphericalangle MBA = 90° - 60° = 30°$. Como $\sphericalangle AMB + \sphericalangle BAM + 30° = 180$ y tenemos que $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BAM$, entonces, $2\sphericalangle AMB = 150°$. Por lo tanto, $\sphericalangle AMB = 75°$.

14. Puesto que las soluciones tienen que satisfacer que $x_1^2 + x_2^2 = 5$, tenemos que $x_1^2 = 5 - x_2^2$, entonces, tenemos que las posibles soluciones enteras son: $x_1 = \pm 1$ y $x_2 = \pm 2$, ó, $x_1 = \pm 2$ y $x_2 = \pm 1$. Por lo tanto, existen 4 diferentes soluciones. Si reemplazamos estos valores de x y solucionamos para b y c, obtendremos las posibles soluciones. Entonces:

Si $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ entonces, restando las dos ecuaciones obtenemos:

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & - & b & + & c & = & 0 \\ 4 & - & 2b & + & c & = & 0 \\ \hline -3 & + & b & & & = & 0 \end{array}$$

Donde $b = 3$ y por lo tanto $c = 2$.

Ahora, si $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$ y restamos estas dos ecuaciones obtenemos que:

$$\begin{array}{rcrcccc} 1 & + & b & + & c & = & 0 \\ 4 & - & 2b & + & c & = & 0 \\ \hline -3 & + & 3b & & & = & 0 \end{array}$$

Así $b = 1$ y por lo tanto $c = -2$.

Si tomamos $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$ y restamos las dos ecuaciones obtenemos:

$$\begin{array}{rcrcccc} 1 & - & b & + & c & = & 0 \\ 4 & + & 2b & + & c & = & 0 \\ \hline -3 & - & 3b & & & = & 0 \end{array}$$

Entonces $b = -1$ y por lo tanto $c = -2$.

Y por último, si $x_1 = -1$ y $x_2 = -2$ entonces restando las dos ecuaciones okbtenemos:

$$\begin{array}{rcrcccc} 1 & + & b & + & c & = & 0 \\ 4 & + & 2b & + & c & = & 0 \\ \hline -3 & - & b & & & = & 0 \end{array}$$

Donde $b = -3$ y por lo tanto $c = 2$.

Así, tenemos que $(3, 2)$, $(1, -2)$, $(-1, -2)$ y $(-3, 2)$, son los posibles valores de b y c.

15. Tenemos que $a^3 + b^3 = 13$ y $a^9 + b^9 = -299$, entonces:

$$\begin{aligned} (a^3 + b^3)^3 &= a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9 \\ (a^3 + b^3)^3 &= (a^9 + b^9) + 3a^3b^3(a^3 + b^3) \\ (13)^3 &= (-299) + 3a^3b^3(13) \\ 2197 &= -299 + 39a^3b^3 \\ a^3b^3 &= \frac{2197 + 299}{39} \\ a^3b^3 &= 64 \\ ab &= 4 \end{aligned}$$

Pero note que esto no puede ser cierto, ya que para que esto ocurriera, tanto a como b, deben ser o ambos positivos o ambos negativos; lo cual contradice las condiciones planteadas inicialmente. Puesto que $a^3 + b^3 = 13$ nos indica que ambos no pueden ser negativos y $a^9 + b^9 = -299$ que ambos no pueden ser positivos. Por lo tanto, no hay solución.

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE PUERTO RICO 2009

EXAMEN NIVEL ELEMENTAL(4to, 5to y 6to)

1. Todos los números que al contarlos de 2 en 2 y sobra 1, son los números impares, los cuales mostramos en la siguiente lista:

   $$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots$$

   Todos los números que al contarlos de 3 en 3 y sobra 1 los mostramos en la siguiente lista:

   $$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, \ldots$$

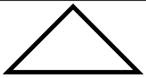
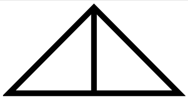
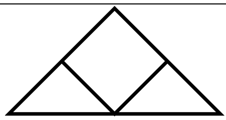
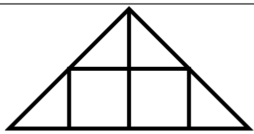
   Como necesitamos el menor número que al contarlo de estas dos formas cumpla lo pedido, debemos de encontrar el menor número que se repita en las dos listas y este es el 7.

2. Comenzamos con 100 participantes, veamos en la siguiente tabla el número de rondas y los participantes que van quedando después de jugarla:

Ronda	Participantes iniciales	Participantes restantes
1	100	50
2	50	25
3	26	13
4	14	7
5	8	4
6	4	2
7	2	1

   En las rondas 3 y 4 se debe agregar 1 participante a los restantes ya que da un número impar, esto de acuerdo a las condiciones del problema. Así el número de rondas es 7.

3. Vamos a contar de acuerdo a los tamaños de los triángulos como lo vemos en la siguiente tabla:

Tipo de triángulo	Número de triángulos
	8
	4
	4
	4

Así que en total tenemos 20 triángulos.

4. Como el número de las cabezas de los dragones rojos son 6 más que el número de patas verdes, esto nos dice que hay un dragon rojo más que un dragon verde. Ahora lo que debemos conseguir es que el número de colas totales sean 44, para ello miramos la siguiente tabla:

Dragones Rojos	Dragones Verdes	Colas Rojas	Colas Verdes	Colas Totales
2	1	4	4	8
3	2	6	8	14
4	3	8	12	20
5	4	10	16	26
6	5	12	20	32
7	6	14	24	38
8	7	16	28	44

Por tanto el número de dragones verdes que hay es 7.

5. Si octavio se comiera 5 galletas uno de los otros dos come más galletas que él, lo cual no es posible. Si Octavio se comiera 6 galletas, entonces necesariamente uno de los otros dos se comería el mismo número que él o más lo cual tampoco es posible. Si se

comiera 7, los demás podrián comer menos que él, por lo tanto esta es la respuesta, Octavio se debe comer mínimo 7 galletas.

6. Los que llegaron detrás de Luis son el doble de los que llegaron delante, Por tanto, si tenemos la lista de los 28 participantes

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,\underline{10},11,12,13,$$
$$14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28$$

Notemos que antes del 10 hay 9 números y despúes del 9 hay 18 números, lo que cumple la condición, por lo tanto Luis ocupó la posición número 10.

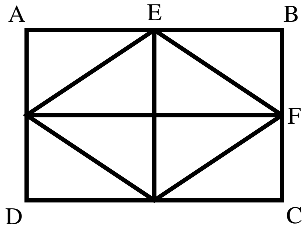
7. Los números terminados en tres son los siguientes 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, que al contarlos son 10 y los múltiplos de tres son

$$3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48,51,$$
$$54,57,60,63,66,69,72,75,78,81,84,87,90,93,96,99$$

que en total son 33, pero notemos que el $3, 33, 63, 93$ se repiten. Por tanto, solo hay 29. Si a estos les sumamos los 10 que terminan en 3, tenemos 39 números.

8. El exágono regular lo podemos dividir en 6 triángulos equilateros de lado 7. Así la diagonal del exágono mide 14 centímetros.

9. Podemos dividir el rectángulo como lo muestra la siguiente figura:



Notemos que hay 8 triángulos iguales. Por tanto, el área del $\triangle EBF = 1cm^2$.

10. Para diferenciar las blusas las llamaremos B_1, B_2, B_3, las faldas F_1, F_2, F_3 y los sombreros S_1, S_2 y los zapatos no importa, ya que siempre usará los mismos zapatos. Las posibilidades que tenemos son las siguientes:

$$\begin{array}{ccc}
B_1, F_1, S_1 & B_2, F_1, S_1 & B_3, F_1, S_1 \\
B_1, F_1, S_2 & B_2, F_1, S_2 & B_3, F_1, S_2 \\
B_1, F_2, S_1 & B_2, F_2, S_1 & B_3, F_2, S_1 \\
B_1, F_2, S_2 & B_2, F_2, S_2 & B_3, F_2, S_2 \\
B_1, F_3, S_1 & B_2, F_3, S_1 & B_3, F_3, S_1 \\
B_1, F_3, S_2 & B_2, F_3, S_2 & B_3, F_3, S_2
\end{array}$$

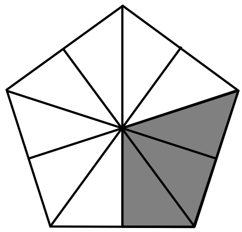
Así que hay 18 posibilidades.

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE PUERTO RICO 2009

EXAMEN NIVEL INTERMEDIO (7mo, 8vo y 9no)

1. Podemos dividir el pentágono como sigue:



   Estos 10 triángulos son iguales. Como 3 de 10 son los que estan sombreados. entonces el porcentaje del pentágono que esta sombreado es el 30 %.

2. Como son números entre 1000 y 2000, estos siempre deben empezar por un 1. Así, el producto de los otros tres dígitos debe ser 8. Las posibilidades que tenemos son

$$222, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 118, 181, 811$$

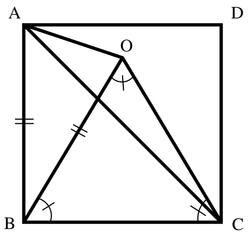
   Es decir, tenemos 10 posibilidades.

3. Como $a > 0$ y $a \cdot b = 12$ entonces $b > 0$. También $c > 0$ pues $b \cdot c = 20$.
   Si multiplicamos las tres ecuaciones tenemos que

$$(a \cdot b)(b \cdot c)(a \cdot c) = 12 \cdot 20 \cdot 15$$
$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 3600$$

   y sacando raiz cuadrada a ambos lados obtenemos que $\sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = \sqrt{3600}$ lo que significa que $a \cdot b \cdot c = \pm 60$. Pero como a, b y c son positivos, entonces el negativo se elimina. Por tanto $a \cdot b \cdot c = 60$.

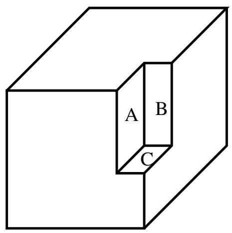
4. Como $\triangle COB$ es equilátero, sus ángulos miden $60°$.



Si $\measuredangle ABC = 90°$, entonces $\measuredangle ABO = 30°$ ya que $\measuredangle ABC - \measuredangle OBC = \measuredangle ABO$. Pero $OB = AB$, por tanto, el $\triangle ABO$ es isósceles. y así $\measuredangle OAB = \measuredangle AOD = 75°$. El $\measuredangle DAC = 45°$ ya que es el ángulo de la diagonal del cuadrado. Por tanto, el $\measuredangle CAO = 30°$.

5. Pedro le dio la vuelta a la carta que tiene el número 3 de un lado y probó que Juan mentía, ya que Juan nunca dijo que del otro lado de un número impar, siempre habia una consonante.

6. El área de superficie es igual a la del cubo, ya que las regiones A, B, C complementan las caras que se recortarón. Por tanto, el área es $6 \times 4 = 24cm^2$.



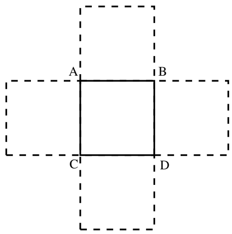
7. Los únicos dígitos que puede tener A son: 0, 1, 4 ó 9. Así todos los posibles valores de A que podemos formar son:

$\underline{100}$	101	104	109	110
111	114	119	140	141
$\underline{144}$	149	190	191	194
199	$\underline{400}$	401	404	409
410	411	414	419	440
$\underline{441}$	444	449	490	491
494	499	$\underline{900}$	901	904
909	910	911	914	919
940	941	944	949	990
991	994	999		

Los números subrayados son los que cumplen la condición, por lo tanto hay 5 valores posibles para A.

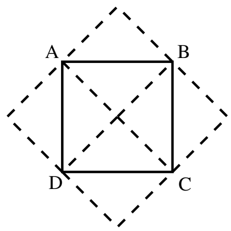
8. Veamos tres casos posibles.

   a) Los lados del cuadrado son un lado de los cuadrados nuevos, como lo muestra la figura

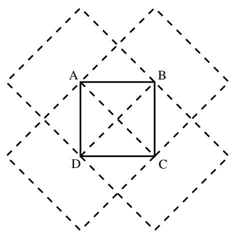
   Tenemos 4 cuadrados de esta forma.

   b) Los lados de los cuadrados son las diagonales de los nuevos cuadrados, como lo muestra la figura

   También tenemos 4 de esta forma.

   c) Las diagonales del cuadrado dado son los lados de los nuevos cuadrados, como lo muestra la figura

   También tenemos 4 cuadrados de esta forma.

En total tenemos 12 cuadrados.

9. Notemos que para conseguir el último dígito de una múltiplicación, debemos tomar el último dígito del producto. Para conseguir los últimos dígitos de núestros números, lo hacemos para cada base. Para la base 3, tenemos lo siguiente:

Exponente	último dígito
1	3
2	9
3	7
4	1

A partir del exponente 5, se empieza a repetir el patrón. Por tanto, estos se repiten cada cuatro, es decir, que el residuo que deje 1001 al dividirlo por 4, nos da el último dígito de 3^{1001}. Pero $1001 = 4 \cdot 250 + 1$, así que el último dígito es 3.
Para la base 7, tenemos lo siguiente:

Exponente	último dígito
1	7
2	9
3	3
4	1

Es decir, que sucede lo mismo que para la base 3, por tanto debemos dividir por 4, pero en este caso el 1002. Como $1002 = 4{\cdot}250{+}2$. Por tanto, el último dígito es 9.
Para la base 13, se cumple lo mismo que el de la base 3. Así el último dígito es $1003 = 4 \cdot 250 + 3$. El último dígito es 7. Como $3 \times 9 \times 7$ termina en el número 9, la respuesta es 9.

10. Para demostrar que es divisible por 48, factorizamos el polinomio:

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 - n - 3 &= n^2(n+3) - (n+3) \\ &= (n+3)(n^2-1) \\ &= (n-1)(n+1)(n+3) \end{aligned}$$

Como n es impar, se puede escribir de la forma $n = 2k + 1$ con k entero positivo, así

$$(n-1)(n+1)(n+3) = (2k)(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2)$$

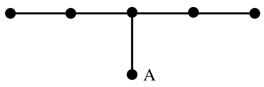
Por tanto, es múltiplo de 8 y esta multiplicado por tres enteros consecutivos. Uno de estos tres enteros consecutivos es divisible por 3. Además k ó $k+1$ es divisible por 2. En conclusión, $n^3 + 3n^2 - n - 3$ es divisible por 48.

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

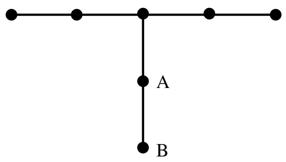
OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE PUERTO RICO 2009

EXAMEN NIVEL SUPERIOR (10mo, 11mo y 12mo)

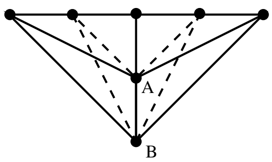
1. Contemos primero los triángulos que se forman con los puntos de la figura

   Es facil ver que hay 10. De igual manera se obtienen 10 triángulos usando el punto B en lugar del punto A en

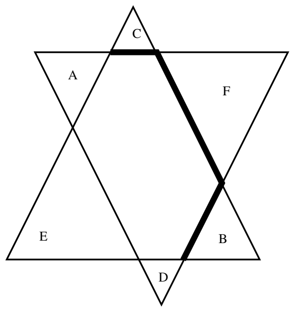
   

   A estos le debemos adiccionar los triángulos donde se usan A y B, estos son los 4 que muestra la figura.

   En total, hay $10 + 10 + 4 = 24$ triágulos formados por los puntos de la figura.

2. Notemos que los triángulos que quedan en la figura todos son equiláteros y también que $A = B$, $C = D$ y $E = F$. También notemos que la parte resaltada de la figura equivale a un lado de un triángulo de lado 6. Como hay dos de estos para formar el hexágono, entonces el perímetro es 12.



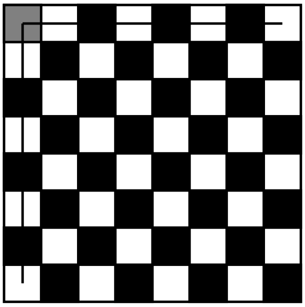
3. Hugo cuando no miente siempre esta diciendo la verdad, por eso cuando responde la primera pregunta ya sabemos que el esta mintiendo, por que los sábados el miente. Por tanto, no se pudieron encontrar un dominigo, lunes miércoles o viernes.
   No pudo ser martes por que la segunda respuesta sería verdad.
   No pudo ser sábado por que la primera respuesta seriá verdad.
   Por tanto, la respuesta es que se encontraron un jueves.

4. Podemos factorizar $2^{16} - 1$

$$\begin{aligned} 2^{16} - 1 &= (2^8 + 1)(2^8 - 1) \\ &= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^4 - 1) \\ &= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2^2 - 1) \\ &= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1) \\ &= 257 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

   Como 257 es primo, este es el primo más grande que divide a $2^{16} - 1$.

5. Consideremos el cuadrado gris que es uno de los cuadrados negros. Eliminando la fila y la columna marcadas por las líneas, podemos escoger 24 cuadrados blancos. Si escogieramos cualquier cuadrado negro diferente al escogido primero y eliminamos la fila y la columna en la que él se encuentra, también podemos contar 24 cuadrados blancos. Si esto lo hacemos con cada cuadrado negro siempre van a resultar 24 cuadrados blancos.
   Como hay 32 cuadrados negros, entonces podemos hacer $32 \cdot 24 = 768$ parejas que cumplen la condición.



6. Para colocar el número 2 hay dos posibilidades: a_1 ó a_2. Para colocar el número 3 hay tres posibilidades, a_1, a_2 ó a_3, pero a_1 ó a_2 ya están ocupados por el número 2. Luego hay sólo dos posibilidades para ubicar el número 3. Para colocar el número 4 hay cuatro posibilidades a_1, a_2, a_3 ó a_4, pero dos de ellas ya están ocupadas por los números 2 y 3. Es decir, hay sólo dos posibilidades. Así sucesivamente se obtiene $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{\text{2009 veces}} = 2^{2009}$.

7. Supongamos que a y b son las raíces del polinomio. Por tanto $p = -(a+b)$ y $q = ab$. Como $198 = p + q$ entonces $198 = p + q = -(a+b) + ab$. Despejando para b, obtenemos que
$$b = \frac{198 + a}{a - 1} \text{ donde } a \neq 1$$
.
Pero a y b son números enteros, así $\dfrac{198+a}{a-1}$ debe ser entero. Consideremos dos casos:
Caso 1: Sea a impar. Esto significa que $b = \dfrac{impar}{par}$ lo cual nunca da un entero.
Caso 2: Sea a par. Esto significa que $b = \dfrac{par}{impar}$ Pero esto sólo es posible si el denominador es igual a ± 1. Por tanto, $a - 1 = 1$ lo que implica que $a = 2$ y $a - 1 = -1$ lo que implica que $a = 0$.
Si $a = 2$, entonces $b = 200$, $p = -202$ y $q = 400$.
Si $a = 0$, entonces $b = -198$, $p = 198$ y $q = 0$.

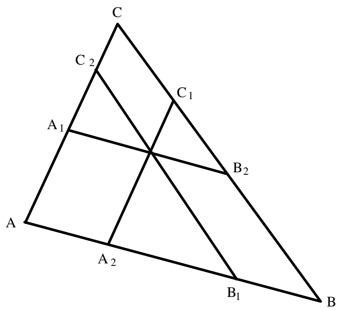
8. Como $\triangle A_1B_2C \sim \triangle ABC$ entonces,
$$\frac{A_1B_2}{AB} = \frac{CA_1}{CA}$$

También como $\triangle A_2BC_1 \sim \triangle ABC$ entonces,

$$\frac{C_1A_2}{CA} = \frac{A_2B}{AB}$$

y como $\triangle AB_1C_2 \sim \triangle ABC$ entonces,

$$\frac{B_1C_2}{BC} = \frac{C_2A}{CA}$$



Sumando estos tres

$$\frac{A_1B_2}{AB} + \frac{B_1C_2}{BC} + \frac{C_1A_2}{CA} = \frac{CA_1}{CA} + \frac{C_2A}{CA} + \frac{C_1A_2}{CA}$$

Pero

$$\frac{CA_1}{CA} + \frac{C_2A}{CA} = \frac{CA}{CA} + \frac{C_2A_1}{CA} = 1 + \frac{C_2A_1}{CA} \qquad (1)$$

y como $C_1A_2 = C_1I + IA_2$. Pero $C_1I = CC_2$ y $IA_2 = A_1A$ por ser paralelas entre paralelas. Por tanto,

$$\frac{C_1A_2}{CA} = \frac{CC_2}{CA} + \frac{A_1A}{CA} \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\frac{A_1B_2}{AB} + \frac{B_1C_2}{BC} + \frac{C_1A_2}{CA} = 1 + \frac{C_2A_1}{CA} + \frac{CC_2}{CA} + \frac{A_1A}{CA} = 1 + 1 = 2.$$

9. Sumando todas las ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} 2xy + 2yz + 2xz &= 94 \\ xy + yz + xz &= 47 \end{aligned}$$

De donde podemos deducir, restandole las ecuaciones dadas que

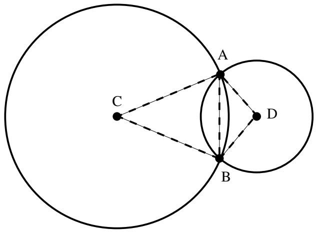
$$\begin{aligned} xy &= 20 \\ xz &= 15 \\ yz &= 12 \end{aligned}$$

Como x, y, z son enteros y $x \cdot y = 20 = 4 \cdot 5$ y $x \cdot z = 15 = 3 \cdot 5$, la única posibilidad es $x = \pm 5$. Si $x = 5$, entonces $z = 3$ y $y = 4$. Si $x = -5$, entonces $y = -4$ y $z = -3$.

10. Tenemos que la multiplicación de dos pares de números consecutivos debe ser un cuadrado perfecto. Sabemos que el máximo común divisor de dos números consecutivos es 1. Por tanto, $x(x+1)$ y $(x+7)(x+8)$ no son cuadrados perfectos. También $x(x+7)$ no puede ser un cuadrado perfecto entero al igual que $(x+1)(x+8)$ ya que el coeficiente del término en x es impar.
Consideremos a $x(x+8) = x^2 + 8x = p^2$ y $(x+1)(x+7) = x^2 + 8x + 7 = q^2$. Reemplazando p^2, tenemos que $p^2 + 7 = q^2$ lo que significa que $(q-p)(q+p) = 7$. De donde, obtenemos que $q = 4$ y $p = 3$.
Así tenemos que $x^2 + 8x = 9$ lo que implica que $x = -9$ y $x = 1$. Añadiendo las soluciones donde el producto es cero se obtiene que las soluciones son $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -7$, $x = -8$ y $x = -9$.

OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS DE PUERTO RICO EXAMEN DE SELECCIÓN 2009

1. Unimos los puntos A y B, formando la cuerda AB, Notemos que podemos formar el triángulo rectángulo ADB cuya hipotenusa es el segmento AB. Utilizando el teorema de Pitágoras llegamos a que $AB = \sqrt{2}$. Pero el triángulo BCA es equilatero, lo que significa que $CA = \sqrt{2}$.



2. Sabemos que $1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = n^2$ se cumple para todo $n > 2$, por tanto tenemos que $1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 9$, de donde, $a_3 = \dfrac{9}{a_2}$. Si seguimos con este proceso, tenemos que $1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 16$, de donde $a_4 = \dfrac{16}{9}$ y $a_5 = \dfrac{25}{16}$. Por lo tanto

$$a_3 + a_5 = \frac{9}{a_2} + \frac{25}{16} = \frac{144 + 25a_2}{16a_2}$$

3. Para hacer los grupos podemos considerar las formas diferentes de sumar 5. Estas son:

   a) (5) Tenemos sólo una forma para escoger el círculo y $4! = 24$ formas para fijarlos dentro del círculo. Por tanto, hay 24 posibilidades

   b) (1 + 4) Tenemos $\binom{5}{4} = 5$ formas de escoger los 4 niños para formar el círculo y $3! = 6$ formas para fijarlos dentro del círculo. Por tanto, $5 \cdot 6 = 30$ posibilidades.

c) $(1+1+3)$ Tenemos $\binom{5}{3} = 10$ formas de escoger los 3 niños para formar el círculo y $2! = 2$ formas de fijarlos. Por tanto, tenemos $10 \cdot 2 = 20$ posibilidades.

d) $(2+3)$ Tenemos $\binom{5}{3} = 10$ formas de escoger los niños de 3 y el otro se escoge automáticamente y tenemos $10 \cdot 2 = 20$ posibilidades.

e) $(1+1+1+2)$ Tenemos $\binom{5}{2} = 10$ formas de escoger los niños de 2 y $1!$ formas de fijarlo. Por tanto, tenemos 10 posibilidades.

f) $(1+2+2)$ Tenemos $\binom{5}{2} = 10$ formas de escoger el primer grupo de 2 y $\binom{3}{2} = 3$ para escoger el segundo grupo. Pero debemos dividir por 2 ya que contamos dos veces. Por tanto tenemos $\dfrac{10 \cdot 3}{2} = 15$ posibilidades.

g) $(1+1+1+1+1)$ Tenemos sólo una posibilidad.

En conclusión tenemos $24 + 30 + 20 + 20 + 10 + 15 + 1 = 120$ posibilidades.

4. Sea K un valor tal que

$$\frac{3x^2 + 16xy + 15y^2}{x^2 + y^2} \leq K$$

Debemos encontrar el mayor valor de K. Entonces

$$\begin{aligned} 3x^2 + 16xy + 15y^2 &\leq K(x^2 + y^2) \\ (3 - K)x^2 + 16xy + (15 - K)y^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Notemos que esta es la ecuación de una parábola (viendola en términos de la variable x) y como es menor o igual que 0, abre hacia abajo y no atraviesa el eje x, sólo lo toca. Por tanto, el discriminante de la ecuación tiene que ser igual a cero. Entonces

$$\begin{aligned} 256y^2 - 4(3 - K)(15 - K)y^2 &= 0 \\ 256 - 180 + 72K - 4K^2 &= 0 \\ K^2 - 72K - 76 &= 0 \\ (K - 19)(K + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el mayor valor es cuando $K = 19$.

5. Como $pq(2p+45q)$ es un cuadrado perfecto, entonces si consideramos que $p = q$, entonces $2p^2q + 45pq^2 = 2p^3 + 45p^3 = 47p^3$ lo que significa que $p = q = 47$. Ahora si $p \neq q$, entonces factorizamos $2p^2q + 45pq^2 = pq(2p + 45q)$. Como $pq(2p + 45q)$ es un cuadrado perfecto, entonces $p|2p + 45q$ y $q|2p + 45q$. Y tenemos que si $(p, q) = 1$ y $p|2p$, entonces $p|45$, así $p = 3$ ó $p = 5$. Por otro lado, como $q|45q$, y $(p, q) = 1$, entonces $q|2$, es decir $q = 2$.
   Veamos cuales de estos valores cumplen:
   Si $p = 3$ y $q = 2$, entonces

$$2p^2q + 45pq^2 = 2(9)(2) + 45(3)(4) = 36 + 540 = 576 = 24^2$$

   Si $p = 5$ y $q = 2$, entonces

$$2p^2q + 45pq^2 = 2(25)(2) + 45(5)(4) = 100 + 900 = 1000 = 10^3$$

   el cual no cumple que sea cuadrado perfecto.
   Por tanto tenemos dos posibilidades $(47, 47)$ y $(3, 2)$.

6. La desigualdad la podemos escribir como

$$r(ab + bc + ca) + (3 - r)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$
$$(ab + bc + ca)\left[r + \frac{(3 - r)}{abc}\right] \geq 9$$

   Pero recordemos que $\dfrac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$. Entonces

$$\frac{(ab + bc + ca)}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

   Luego $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.
   Multiplicando a ambos lados por $\left[r + \dfrac{(3 - r)}{abc}\right]$ obtenemos que:

$$(ab + bc + ca)\left[r + \frac{(3 - r)}{abc}\right] \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\left[r + \frac{(3 - r)}{abc}\right]$$

Reemplazando $y = abc$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
(ab+bc+ca)\left[r+\frac{(3-r)}{y}\right] &\geq 3\sqrt[3]{y^2}\left[r+\frac{(3-r)}{y}\right]\\
&= 3\left(ry^{2/3}+(3-r)y^{-1/3}\right)\\
&= 3\left(ry^{2/3}+\frac{3-r}{2}y^{-1/3}+\frac{3-r}{2}y^{-1/3}\right)\\
&\geq 9\sqrt[3]{ry^{2/3}\frac{3-r}{2}y^{-1/3}\frac{3-r}{2}y^{-1/3}}\\
&= 9\sqrt[3]{r\cdot\frac{3-r}{2}\cdot\frac{3-r}{2}}\\
&= 9\sqrt[3]{\frac{r(3-r)^2}{4}} \geq 9
\end{aligned}
$$

Así $\sqrt[3]{r(3-r)^2} \geq 2^{2/3}$, luego $r(3-r)^2 \geq 4$. Entonces $r^3 - 6r^2 + 9r - 4 \geq 0$ y al factorizarlo obtenemos que $(r-1)^2(r-4) \geq 0$. Entonces $r = 1$ y $r \geq 4$. Notemos que para $r \geq 4$ la expresión $\left[r+\dfrac{(3-r)}{abc}\right]$ puede ser menor que cero. Por tanto, el único valor que cumple la desigualdad es $r = 1$.